DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
Universitatea Națională de Știință și
Tehnologie POLITEHNICA București
Centrul Universitar Pitești

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul VI, nr. 11-12 / 2023

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura
Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
Universitatea Națională de Știință și Tehnologie
POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești

Comitetul de redacție:

Eduard ASADURIAN	Tudor BĂLĂNESCU
Costel BĂLCĂU - redactor șef	Loredana BĂLILESCU
Nicolae BOLD	Doru CONSTANTIN
Şerban COSTEA	Laurențiu DEACONU
Maria-Crina DIACONU	Ionuț DINCĂ
Mihaela DUMITRACHE	Mihai Armand IONESCU
Florentin IPATE	Constantin GEORGESCU
Raluca Mihaela GEORGESCU	Camelia GHELDIU
Marius MACARIE	Maria MIROIU
Gheorghe NISTOR	Antonio Mihail NUICĂ
Viorel PĂUN	Doru Anastasiu POPESCU
Marin POPESCU	Nicolae-Doru STĂNESCU
Alina Florentina ȘTEFAN	Cristina TUDOSE
Adrian ŢURCANU	Corneliu UDREA

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihail.tanase@upb.ro

Redacția: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul VI, Nr. 11-12, Decembrie 2023

Cuprins

DIN ACTIVITATEA DEPARTAMENTULUI 5

M.R. Găman, M. Miroiu

Concursul ,,Dräexlmaier IT Day", Ediția a V-a, 2023 5

D.A. Popescu, C. Bălcău, D. Constantin

Prezentarea Concursului de Informatică ,,Programming Day", Ediția a IV-a, Pitești, 13 mai 2023 9

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ 23

D. Mărghidanu

Refinements of classical means inequalities 23

T. Zvonaru

O întărire a Inegalității lui Nesbitt 27

C. Bălcău, R.A.M. Brănescu

În legătură cu Problema 28569 din G.M.-B nr. 4/2023 29

D. Jinga

Asupra unor probleme date la concursurile de titularizare și definitivare în învățământ din iulie 2023 31

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ 37

V. Păun

Algoritmul extins al lui Euclid 37

RUBRICA DE ROBOTICĂ ȘI MEDII GRAFICE DE PROGRAMARE 45

D.A. Popescu

Medii grafice interactive. Implementarea algoritmilor care conțin structura secvențială în mediul grafic Scratch 45

I.A. Popescu

Algoritmi în medii grafice interactive. Implementarea algoritmilor care conțin structura alternativă în mediul grafic interactiv Scratch 48

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE 52

Teste pentru examenul de Evaluare Națională 52

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 62

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 66

Teste pentru admiterea la facultate 73

Teste grilă pentru admiterea la facultate 76

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE 81
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 81
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 86

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI 91
Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 8 91
Probleme propuse pentru liceu 108

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI 112
Probleme propuse 112

DIN ACTIVITATEA DEPARTAMENTULUI

Concursul ,,Dräexlmaier IT Day", Ediția a V-a, 2023

Mihai-Radu Găman [1] *și Maria Miroiu* [2]

Departamentul IT Center Pitești din cadrul companiei DRÄXLMAIER Group, în colaborare cu Departamentul Matematică-Informatică, a organizat în luna mai 2023 a cincea ediție a concursului "Dräxlmaier IT Day".

Concursul a constat în realizarea de aplicații informatice pentru un Sistem de gestionare a transporturilor în cadrul locațiilor DRÄEXLMAIER. Nu au fost restricții în ceea ce privește limbajele de programare. Datele se puteau stoca într-o bază de date mySQL, PostgreSQL, MSQL Server etc. sau fișiere json, xml, txt (pentru care integritatea datelor și a relațiilor va fi realizată în interiorul aplicației). Era necesară o aplicație backend pentru manipularea de date venite din baza de date și efectuarea de operații CRUD, respectiv o aplicație frontend pentru afișarea datelor din backend, cu o interfață grafică pentru administratori și una pentru responsabilii de locații. Obligatoriu interfețele erau despărțite, fie printr-un sistem de login, fie prin două interfețe separate. De asemenea, era necesară generarea de documente pdf cu programul transporturilor pentru o locație și o poartă la alegere.

Punctarea proiectelor s-a făcut astfel:

- 100 de puncte pentru implementarea bazei de date;
- 100 de puncte pentru aplicația care realizează operațiile CRUD în baza de date;
- 100 de puncte pentru aplicația frontend care realizează afișarea datelor din baza de date;
- 100 de puncte pentru realizarea raportului cu programarea transporturilor.

Data limită de depunere a proiectelor a fost 21 mai 2023. Prezentarea proiectelor s-a desfășurat la sediul IT Center Pitești, în data de 26 mai 2023. La concurs au participat studenți de la domeniul de licență Informatică și de la domeniul de master Advanced Techniques for Information Processing din cadrul Facultății de Științe, Educație Fizică și Informatică, Universitatea din Pitești. Juriul a fost compus din mai mulți specialiști din cadrul IT Center Pitești, Draexlmaier Group.

Premiile oferite de IT Center Pitești din cadrul companiei DRÄXLMAIER Group au fost următoarele: premiul I, care a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 1400 lei, a fost câștigat de studentul Tuță Denis-Octavian de la Informatică, anul al

[1]Head of Delivery Supply Chain Management, IT Center Pitești, Draexlmaier Group, mihai.gaman@draexlmaier.com

[2]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, maria.miroiu@upb.ro

treilea, premiul al II-lea, care a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 700 lei, a fost câștigat de studentul Croitoru Radu-Alexandru de la domeniul de master Advanced Techniques for Information Processing, anul întâi, iar premiul al III-lea, care a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 250 lei, a fost câștigat de studentul Rusea Cosmin de la Informatică, anul al doilea. Au mai fost oferite mențiuni următorilor studenți de la domeniul de licență Informatică, anul al doilea: David George-Bogdan, Badea Sebastian-Alexandru, Vladu Marian-Cătălin, Florea Răzvan-Andrei, Iordache Ionuț-Fabian, Ciontolac Gabriela-Sidonia și Pițigoi Denis-Nicolae.

1 Scop

Scopul proiectului constă în crearea unei aplicații web, desktop sau mobilă care să faciliteze transportul bunurilor de la furnizori externi în locațiile Dräexlmaier.

Situația curentă din companie este următoarea: în anumite locații, datorită fluxului mare de transporturi de materiale, tirurile au timpi mare de așteptare. De asemenea, se formează cozi la intrarea în depozitele unde va fi făcută descărcarea.

Se dorește ca prin folosirea aplicației create, administratorii depozitelor să poată gestiona mai bine activitatea de descărcare a materialelor si să poată preîntâmpina formarea de cozi la intrarea in depozite.

2 Model pentru entitățile din baza de date

Tabelul următor propune o descriere a entităților bazei de date. Dar se pot folosi entități și atribute proprii.

Tabel 1. Model pentru entitățile din baza de date

Entități	**Descriere**	**Atribute**
Șofer	Persoană responsabilă pentru transportul bunurilor sau materialelor dintr-o locație în alta.	id (cheie primară) nume prenume numar_telefon email
Transport	Transportul care ajunge la o locație finală. Poate fi privit ca un camion condus de un șofer.	id (cheie primară) id_sofer (cheie străină) id_locatie (cheie străină) statusul transportului (neexpediat, expediat, livrat) data_expediere data_livrare
Locație	Locația finală unde va ajunge transportul. Face parte din companie.	id (cheie primară) adresa
Poartă	Poarta din locația finală unde va ajunge transportul.	id (cheie primară) id_locație (cheie străină)
Program transporturi	Programul transporturilor pentru o anumită poartă.	id (cheie primară) id_poartă (cheie străină) id_transport (cheie străină) ora_livrare

Entități	Descriere	Atribute
Responsabil locație	Persoanele responsabile de primirea mărfurilor în locație.	id (cheie primară) id_locatie (cheie străină) nume prenume numar_telefon email

3 Relațiile dintre entități

O posibilă diagramă conceptuală a relațiilor dintre entități propuse anterior este descrisă în imaginea următoare.

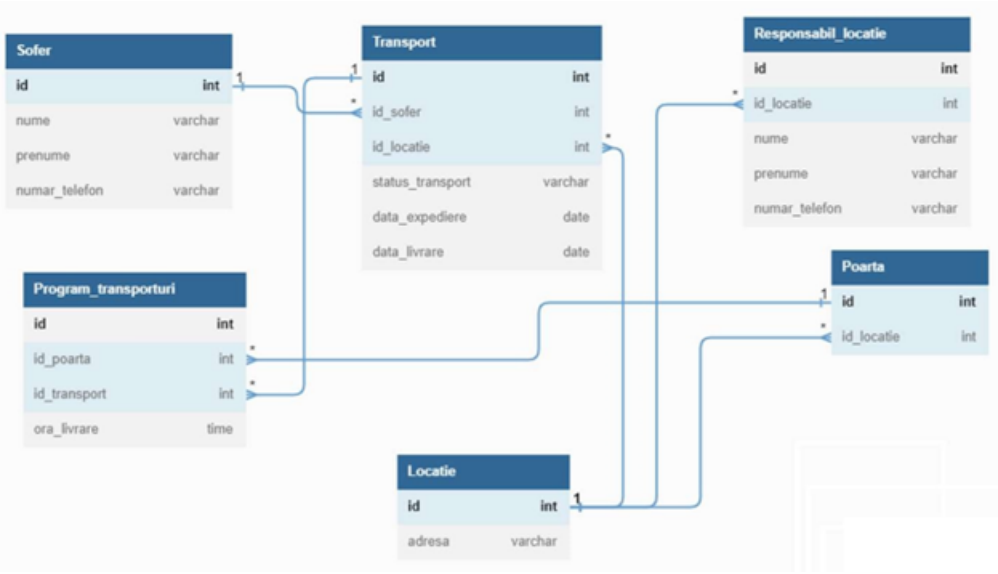


Figura 1. Model pentru relațiile dintre entități

4 Exemple de interfețe grafice

Mai jos se găsesc două propuneri de interfețe grafice.

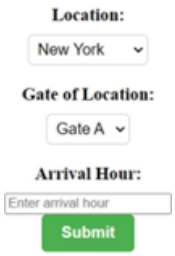
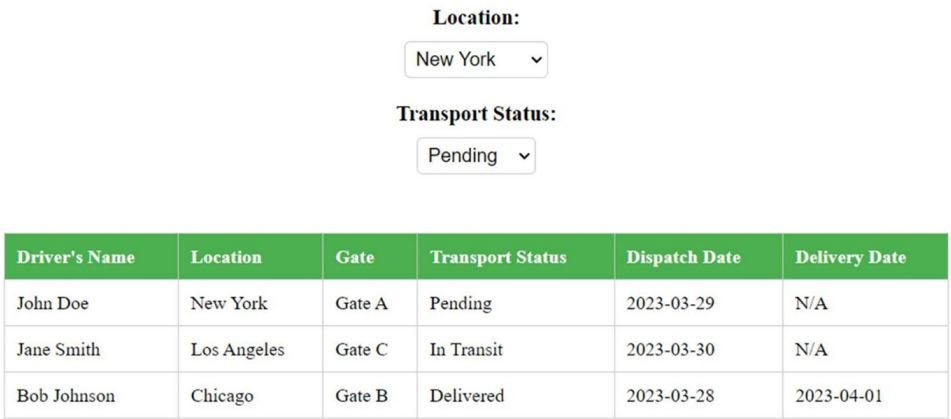


Figura 2. Interfață pentru adăugarea de rezervare a descărcării unui transport



Driver's Name	Location	Gate	Transport Status	Dispatch Date	Delivery Date
John Doe	New York	Gate A	Pending	2023-03-29	N/A
Jane Smith	Los Angeles	Gate C	In Transit	2023-03-30	N/A
Bob Johnson	Chicago	Gate B	Delivered	2023-03-28	2023-04-01

Figura 3. Interfață pentru vizualizarea transporturilor

5 Exemplu de raport pentru programarea transporturilor

Delivery hour	Location	Gate	Driver's name	Driver's phone number
8:00	D2	3	Popescu Andrei	0712345678
8:15	X5	5	Pana Andrei	0787654321
9:00	A2	2	Stoica Bogdan	0712345678
9:30	A2	1	Ilie Matei	0712345678

Figura 4. Conținutul fișierului pdf cu detaliile transporturilor

Prezentarea Concursului de Informatică ,,Programming Day", Ediția a IV-a, Pitești, 13 mai 2023

Doru Anastasiu Popescu [1], *Costel Bălcău* [2] *și Doru Constantin* [3]

Departamentul Matematică - Informatică al Universității din Pitești a organizat a IV-a ediție a concursului de programare clasică (folosind limbajele C/C++ - Mediul de programare Code::Blocks) cu numele "Programming Day".

La această ediție au participat elevi de la unități școlare reprezentative din județele Argeș și Olt, precum și studenți de la Universitatea din Pitești. Sponsorii concursului, ROWEB, VeloxLogistics, Centrul EduMar și Universitatea din Pitești au premiat concurenții clasați pe primele locuri cu obiecte IT și bani. În continuare prezentăm problemele date în concurs împreună cu indicațiile de rezolvare. Acestea au fost elaborate de conf. univ. dr. Doru Anastasiu Popescu, conf. univ. dr. Doru Constantin și conf. univ. dr. Costel Bălcău de la Universitatea din Pitești.

Concursul de programare clasică

Acesta a fost organizat pe trei secțiuni, corespunzătoare clasei a IX-a, clasei a X-a și claselor a XI-a și a XII-a. Concurenții au avut de rezolvat câte două probleme, fiecare având un punctaj de 100 de puncte.

Clasa a IX-a

Problema 1 – parcare

Faleza unei stațiuni de pe malul unei mări are amenajată o parcare în linie dreaptă cu n locuri numerotate cu $1, 2, \ldots, n$. Dintre aceste locuri primăria a alocat pentru fiecare locuitor rezident în stațiune câte un loc. În stațiune sunt p locuitori rezidenți, numerotați cu $1, 2, \ldots, p$, al i-lea rezident având alocat locul de parcare L_i de pe faleză, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Hotelurile din stațiune, codificate prin $1, 2, \ldots, m$, doresc fiecare locuri de parcare cu numere consecutive în apropierea lor, delimitate de anumite numere. Astfel hotelul cu numărul de ordine i dorește locurile cu numerele consecutive din mulțimea $\{a_i, a_i + 1, \ldots, b_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

[1]Conf. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, doru.popescu0301@upb.ro

[2]Conf. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, costel.balcau@upb.ro

[3]Conf. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, doru.constantin0804@upb.ro

Locurile de parcare care au asociate numere prime se numesc locuri VIP, iar un hotel este considerat *norocos* dacă nu există locuitori rezidenți care să aibă locurile de parcare în mulțimea locurilor dorite de el.

Cerințe

Cunoscând n - numărul locurilor de parcare, p - numărul de locuitori rezidenți în stațiune, m - numărul de hoteluri, $L_1, L_2, \ldots, L_p$ - numerele locurilor de parcare ale locuitorilor rezidenți și $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_m, b_m]$ intervalele cu locurile de parcare dorite de hoteluri, se cere:

1. numărul de hoteluri norocoase și numerele de ordine ale acestor hoteluri, în ordine crescătoare;
2. numărul maxim de locuri parcare VIP solicitate de un hotel, care nu aparțin locuitorilor rezidenți din stațiune.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului de intrare `parcare.in` se află numărul C, număr care poate fi 1 sau 2 și reprezintă cerința ce trebuie rezolvată.

Pe cea de-a doua linie se află, separate prin câte un spațiu, n, p și m, reprezentând numărul locurilor de parcare, numărul de locuitori rezidenți în stațiune, respectiv numărul de hoteluri.

Pe linia a treia se află, separate prin câte un spațiu, numerele locurilor de parcare ale locuitorilor rezidenți: $L_1, L_2, \ldots, L_p$.

Pe următoarele m linii se află intervalele cu locurile libere dorite de hoteluri a_i b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Date de ieșire

Dacă C este 1, fișierul de ieșire `parcare.out` va conține numerele de la cerința 1, adică numărul de hoteluri norocoase și numerele de ordine ale acestor hoteluri, în ordine crescătoare, separate prin câte un spațiu.

Dacă C este 2, fișierul de ieșire `parcare.out` va conține numărul de la cerința 2, adică numărul maxim de locuri parcare VIP solicitate de un hotel, care nu aparțin locuitorilor rezidenți din stațiune.

Restricții și precizări

- $1 \leq p \leq n \leq 2000000$;
- $1 \leq L_i \leq n$, $i = 1, 2, \ldots, p$;
- $1 \leq a_i \leq b_i \leq n$, $i = 1, 2, \ldots, m$;
- $1 \leq m \leq 10000$, $1 \leq p \leq 10000$.
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se vor acorda 20 de puncte.
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 2 se vor acorda 80 de puncte.

Exemplu

parcare.in	parcare.out
1 40 4 5 1 36 17 13 5 12 35 38 3 6 15 18 21 33	3 1 3 5
2 40 4 5 1 36 17 13 5 12 35 38 3 6 15 18 21 33	3

Explicații

Hotelurile cu numerele de ordine 1, 3, 5 nu conțin locuri de parcare alocate rezidenților stațiunii. Numărul maxim de locuri VIP nealocate rezidenților și solicitate de un hotel este 3. Hotelurile care au solicitat număr maxim de locuri de parcare VIP sunt 1 (cu locurile VIP nealocate rezidenților: 5, 7, 11) și 5 (cu locurile VIP nealocate rezidenților: 23, 29, 31).

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 12 MB.
Soluție

Cerința 1 (20 puncte)

Varianta 1

Parcurgem intervalele hotelurilor și verificăm dacă conțin locuri de parcare alocate rezidenților. Vom număra și afișa hotelurile care nu conțin locuri de parcare alocate rezidenților.

Varianta 2

Vom construi un vector v de dimensiune n cu componente de tip bool, în care $v[i]$ =true, dacă i este loc de parcare alocat rezidenților din stațiune, respectiv $v[i]$ =false, în caz contrar. Folosind acest vector, determinăm în vectorul s de dimensiune n numărul de locuri de parcare repartizate rezidenților pe intervale de forma $[1, i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Astfel:

$s[0] = 0$, iar pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ dacă $v[i]$ =false $\Rightarrow s[i] = s[i-1] + 1$, altfel $s[i] = s[i-1]$.

Numărul de locuri de parcare ocupate de rezidenți pe segmente de forma $[a[i], b[i]]$ va fi egal cu $s[b[i]] - s[a[i] - 1]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Pentru a rezolva cerința 1 vom număra și afișa hotelurile cu $s[b[i]] - s[a[i] - 1] = 0$.

Cerința 2 (80 puncte) Vom construi cu ciurul lui Eratostene vectorul v de dimensiune n cu componente de tip bool, în care $v[i]$ =true, dacă i este neprim și $v[i]$ =false in caz contrar.

Pentru că va trebui sa excludem locurile de parcare alocate rezidenților, vom marca în v aceste locuri astfel: $v[L[i]]$ =true, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Pentru numărarea locurilor de parcare VIP procedăm la fel ca la cerința 1 (varianta 2), $s[i]$ = numărul locurilor de parcare VIP nealocate rezidenților pe segmental de locuri $[1, i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Numărul cerut în cerința 2 va fi $\max\{s[b[i]] - s[a[i] - 1] \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$.

Problema 2 – tablou

Se dă un șir cu n numere naturale: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cu acest șir se construiește un tablou bidimensional pătratic, notat cu a, de dimensiune n, astfel:

- prima linie este formată din șirul dat: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- începând cu a doua linie, fiecare linie se construiește folosind suma cifrelor numerelor de pe linia anterioară, astfel al j-lea termen de pe lina i este egal cu suma cifrelor celui de-al j-lea termen de pe linia $i - 1$, $2 \leq i \leq n$.

Pentru subtablouri cu laturile paralele cu marginile tabloului a, date prin linia și coloana primului element, respectiv linia și coloana ultimului element, se dorește suma elementelor.

Cerințe

Cunoscând n, numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și coordonatele colțurilor stânga sus $(i1, j1)$ și dreapta jos $(i2, j2)$ pentru un subtablou definit ca mai sus, se cere:

1. suma elementelor de pe linia 2;
2. suma elementelor subtabloului definit de colțurile de coordonate $(i1, j1)$ și $(i2, j2)$.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului de intrare `tablou.in` se află C – cu valorile 1 sau 2, pe a doua linie n, pe linia a treia șirul de numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ separate prin câte un spațiu, iar pe a patra linie numerele $i1, j1, i2, j2$ separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă C este 1, fișierul de ieșire `tablou.out` va conține suma de la cerința 1. Dacă C este 2, fișierul de ieșire `tablou.out` va conține suma de la cerința 2.

Restricții și precizări

1. $2 \leq n \leq 10000$;
2. $1 \leq x_i \leq 2000000000$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
3. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se vor acorda 20 de puncte.
4. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 2 se vor acorda 80 de puncte.

Exemplu

tablou.in	tablou.out
1 3 89 3691 37 2 1 3 3	46
2 3 89 3691 37 2 1 3 3	65

Explicații

Pentru datele de intrare din exemplu trebuie să se construiască următorul tablou:

89 3691 37

17 19 10

8 10 1

Pentru cerința 1 ($C = 1$) suma elementelor de pe linia 2 este $17 + 19 + 10 = 46$.

Pentru cerința 2 ($C = 2$) trebuie să se afișeze 65, pentru că subtabloul definit de coordonatele $(2, 1)$ și $(3, 3)$ conține elementele:

17 19 10

8 10 1

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.
Soluție

*Cerința 1 (**20 puncte**)*

Se calculează suma cifrelor fiecărei componente $x[i]$ din vectorul x și apoi suma s a acestor sume. Apoi se afișează s.

*Cerința 2 (**80 puncte**)*

Se utilizează numai vectorul x. Componentele lui se înlocuiesc cu suma cifrelor lor de $i - 1$ ori sau până când se ajunge la un vector cu toate componentele cifre.

O parte din vectorul x devine linie curentă în subtablou, apoi acesta se modifică dacă are componente > 9.

Calculul sumei elementelor subtabloului se împarte în două:

1. sume de linii care au componente > 9;
2. sume de linii care nu au componente > 9 (calculată cu formulă).

Clasa a X-a

Problema 1 – muzeu

Cerințe

Cunoscând faptul că la un muzeu se află n automobile de epocă, fiecare având câte o plachetă cu anul de fabricație și firma producătoare, se cere:

1. numărul de firme care au mașini în muzeu;
2. Nr %6869, unde Nr este numărul de modalități de formare a unei expoziții cu k mașini din muzeu, care să conțină cel puțin o mașină fabricată într-un anumit an x.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului de intrare `muzeu.in` se află C – cu valorile 1 sau 2, pe a doua linie n, k și x separate prin câte un spațiu, iar pe următoarele n linii se află anul și firma producătoare pentru mașinile din muzeu, separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Dacă C este 1, fișierul de ieșire `muzeu.out` va conține numărul de firme care au mașini în muzeu. Dacă C este 2, fișierul de ieșire `muzeu.out` va conține numărul de la cerința 2.

Restricții și precizări

1. $1 \leq n \leq 2000$;
2. nu există două mașini în muzeu fabricate de aceeași firmă în același an;
3. $1 \leq k \leq n$;
4. $0 \leq$ an fabricație $\leq 10^9$;
5. firmele au denumirea formată din cel mult 50 de caractere;
6. toate liniile din fișierul de intrare se termină cu *Enter*.
7. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se vor acorda 20 de puncte.
8. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 2 se vor acorda 80 de puncte.

Exemplu

`muzeu.in`	`muzeu.out`
1 4 2 1982 1954 audi 1982 dacia 1968 fiat 1982 audi	3
2 4 2 1982 1954 audi 1982 dacia 1968 fiat 1982 audi	5

Explicații

Pentru cerința 1 sunt 3 firme care au mașini în muzeu: audi, dacia și fiat.

Pentru cerința 2 sunt 5 variante de expoziție, acestea sunt:

1982 dacia; 1954 audi;

1982 dacia; 1968 fiat;

1982 audi; 1954 audi;

1982 audi; 1968 fiat;

1982 dacia; 1982 audi.

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.
Soluție

*Cerința 1 (**20 puncte**)*

Se realizează operația de ordonare și se afișează numărul de firme distincte.

*Cerința 2 (**80 puncte**)*

Se determină p = numărul de mașini cu anul de fabricație x. Apoi, se folosește expresia $comb(p,1)*comb(n-p,k-1)+comb(p,2)*comb(n-p,k-2)+\ldots+comb(p,p)*comb(n-p,k-p)$ și rezultă suma % 6869, folosind triunghiul lui Pascal.

Problema 2 – octogon

Cerințe

Cunoscând coordonatele a n puncte în plan astfel încât să nu existe trei puncte coliniare, se cere:

1. numărul de segmente cu ambele capete în mulțimea dată de puncte, care au dreptele suport paralele cu una din axele de coordonate;
2. partea întreagă a ariei maxime a unui octogon cu toate vârfurile în mulțimea dată de puncte.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului de intrare `octogon.in` se află C – cu valorile 1 sau 2, pe a doua linie n, iar pe următoarele n linii se află perechi de numere naturale separate prin câte un spațiu, reprezentând abscisa și ordonata fiecărui punct.

Date de ieșire

Dacă C este 1, fișierul de ieșire `octogon.out` va conține numărul de la cerința 1. Dacă C este 2, fișierul de ieșire `octogon.out` va conține numărul de la cerința 2.

Restricții și precizări

1. $8 \leq n \leq 18$;
2. coordonatele punctelor sunt numere naturale ≤ 100000;
3. octogonul este un poligon convex cu 8 vârfuri.
4. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se vor acorda 20 de puncte.
5. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 2 se vor acorda 80 de puncte.

Exemplu

`octogon.in`	`octogon.out`
1 10 0 50 80 40 100 0 100 150 150 50 50 150 150 100 40 80 0 100 50 0	8

octogon.in	octogon.out
2 10 0 50 80 40 100 0 100 150 150 50 50 150 150 100 40 80 0 100 50 0	17500

Timp maxim de execuție: 5 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.
Soluție

*Cerința 1 (**20 puncte**)*

Se parcurg perechile de noduri și se numără cele care definesc un segment paralel cu una din axe.

*Cerința 2 (**80 puncte**)*

Se folosește metoda backtracking. Se obțin submulțimi de 8 puncte cu verificare parțială legată de poziția punctelor în același semiplan față de dreapta ce conține punctul curent și cel anterior generat.

Clasele a XI-a și a XII-a

Problema 1 – componente

Cerințe

Se dau n puncte în plan, numerotate cu $1, 2, \ldots, n$, prin coordonatele lor. Unele dintre puncte sunt unite prin m segmente astfel încât să se formeze una sau mai multe componente conexe (nodurile grafului neorientat sunt puncte, iar muchiile sunt segmente). Se cere:

1. numărul de componente conexe cu cel puțin două noduri;

2. suma minimă a lungimilor segmentelor ce pot completa desenul astfel încât să se obțină o singură componentă conexă cu cel puțin două noduri.

Date de intrare
Pe prima linie a fișierului de intrare `componente.in` se află C – cu valorile 1 sau 2, pe a doua linie n și m separate printr-un spațiu, pe următoarele n linii coordonatele punctelor, iar în continuare pe următoarele m linii perechi de numere ce corespund capetelor segmentelor date.

Date de ieșire
Dacă C este 1, fișierul de ieșire `componente.out` va conține numărul de la cerința 1. Dacă C este 2, fișierul de ieșire `componente.out` va conține partea întreagă a numărului de la cerința 2.

Restricții și precizări

1. $3 \leq n \leq 5000$;
2. numărul de componente conexe cu cel puțin două noduri este cel mult 500;
3. coordonatele punctelor sunt numere naturale ≤ 100000.
4. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se vor acorda 20 de puncte.
5. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 2 se vor acorda 80 de puncte.

Exemplu

componente.in	componente.out
1 10 5 60 20 10 0 0 40 0 0 60 0 10 20 20 0 0 20 100 1000 200 2000 3 8 1 5 8 6 2 7 8 4	3
2 10 5 60 20 10 0 0 40 0 0 60 0 10 20 20 0 0 20 100 1000 200 2000 3 8 1 5 8 6 2 7 8 4	50

Explicație

Pentru cerința 1 sunt 3 componente conexe cu cel puțin două noduri. Astfel avem:

componenta conexă cu muchia: [1,5];

componenta conexă cu muchia: [2,7];

componenta conexă cu muchiile: [3,8], [8,6], [8,4].

Pentru cerința 2, se adaugă segmentele (muchiile) [5,7] si [4,2] cu lungimile 40, respectiv 10, lungimea totală fiind $40 + 10 = 50$.

Timp maxim de execuție: 0.5 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 4 MB.
Soluție

*Cerința 1 (**20 puncte**)*

Pentru graful cu n vârfuri și muchiile date se determină numărul k de componente conexe și în ce componentă conexă se găsește fiecare punct. Rezultă $a[i]$ = numărul de ordine al componentei conexe din care face parte i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

*Cerința 2 (**80 puncte**)*

Se determină distanța dintre orice două puncte. Rezultă matricea c de dimensiune $n * n$.

Se determină distanța dintre componentele i și j prin relația:

$$d[i][j] = \min\{c[p][q] | 1 <= p, q <= n,\ a[p] = i,\ a[q] = j\}.$$

Construim un graf ponderat (graf condensat), în care nodurile sunt cele k componente, iar costurile muchiilor sunt date de tabloul d.

Costul unui APM pentru graful construit este soluția de la cerința 2.

Problema 2 – submultimi

Cerințe

Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ și pentru o submulțime A a lui M notăm cu $s(A)$ suma elementelor lui A. Dacă A este mulțimea vidă, atunci $s(A)$ este 0. Se cere:

1. numărul de submulțimi A ale lui M cu $s(A)$ = impară;
2. *sum* % 6869, unde *sum* este suma tuturor sumelor $s(A)$, pentru toate submulțimile A din M cu $s(A)$ impară.

Date de intrare
Pe prima linie a fișierului de intrare `submultimi.in` se află C – cu valorile 1 sau 2, iar pe a doua linie n.

Date de ieșire
Dacă C este 1, fișierul de ieșire `submultimi.out` va conține numărul de la cerința 1. Dacă C este 2, fișierul de ieșire `submultimi.out` va conține numărul de la cerința 2.

Restricții și precizări

1. $3 \leq n \leq 10000$.
2. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se vor acorda 20 de puncte.
3. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 2 se vor acorda 80 de puncte.

Exemplu

submultimi.in	submultimi.out
1 3	4
2 3	12

Timp maxim de execuție: 0.5 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.
Soluție

*Cerința 1 (**20 puncte**)*

Numărul căutat este 2^{n-1}.

*Cerința 2 (**80 puncte**)*

Numărul căutat se determină cu relația de recurență:

$Nr(n) = 2 * Nr(n-1) + n * 2^{n-2}$;

$Nr(3) = 12$.

Secțiunea studenți

Problema 1 – graf

Cerințe

Se dă un graf bipartit complet prin n - numărul de noduri, m - numărul de muchii și m perechi de noduri reprezentând muchiile. Nodurile sunt etichetate cu numerele $1, 2, \ldots, n$. Se cere:

1. numărul cel mai mic de noduri dintr-o parte (submulțime de noduri) ce definește graful bipartit;
2. numărul de arbori parțiali modulo 6869 ai grafului dat.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului de intrare `graf.in` se află C – cu valorile 1 sau 2, pe a doua linie n și m separate printr-un spațiu, iar pe următoarele m linii perechi de noduri separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă C este 1, fișierul de ieșire `graf.out` va conține numărul de la cerința 1. Dacă C este 2, fișierul de ieșire `graf.out` va conține numărul de la cerința 2.

Restricții și precizări

- $2 \leq n \leq 101$.
- Pentru toate testele se garantează faptul că graful este bipartit complet.
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se vor acorda 40 de puncte.
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 2 se vor acorda 60 de puncte.

Exemplu

graf.in	graf.out
1 3 2 1 2 3 2	1
2 4 4 1 3 1 2 3 4 4 2	4

Explicații

Pentru cerința 1 submulțimile partiției nodurilor sunt $\{1, 3\}$ $\{2\}$. A doua submulțime are cel mai mic număr de elemente, adică 1.

Pentru cerința 2 sunt 4 arbori parțiali (pe acest exemplu aceștia sunt obținuți prin eliminarea a câte unei muchii).

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.
Soluție

*Cerința 1 (**40 puncte**)*

Folosind parcurgerea în lățime sau adâncime se stabilește mulțimea în care se găsește fiecare nod: 1 - pentru mulțimea A și -1 - pentru mulțimea B.

Se afișează $\min(\text{card}(A), \text{card}(B))$.

*Cerința 2 (**60 puncte**)*

Notam cu $p = \text{card}(A)$ și $q = \text{card}(B)$.

Numarul căutat este $p^{q-1} * q^{p-1}$ % 6869. Pe măsură ce se efectuează înmulțirile se calculează % 6869.

Problema 2 - partitii

Cerințe

Se dă o mulțime cu n elemente $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O *partiție k-specială* a lui A are proprietatea că este formată din k submulțimi având sumele elementelor numere distincte. Se cere:

1. o partiție a lui A în care submulțimile au câte două elemente fiecare și sumele elementelor lor sunt egale;
2. numărul de *partiții k-speciale* pentru A.

Date de intrare

Pe prima linie a fișierului de intrare `partitii.in` se află C – cu valorile 1 sau 2, pe a doua linie n și k separate printr-un spațiu, iar pe următoarea linie elementele mulțimii A separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă C este 1, fișierul de ieșire `partitii.out` va conține pe câte o linie submulțimile partiției de la cerința 1, elementele de pe o linie sunt separate printr-un spațiu și sunt scrise în ordine crescătoare. Submulțimile partiției se vor scrie în ordinea crescătoare a primului element.

Dacă C este 2, fișierul de ieșire `partitii.out` va conține numărul de la cerința 2.

Restricții și precizări

- $2 \leq k \leq n \leq 14$, n număr par;
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere naturale cu maxim 5 cifre.
- Pentru toate testele se garantează existența soluției la cerința 1.
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se vor acorda 40 de puncte.
- Pentru rezolvarea corectă a cerinței 2 se vor acorda 60 de puncte.

Exemplu

`partitii.in`	`partitii.out`
1 4 2 9 2 1 8	1 9 2 8
2 4 2 9 2 1 8	6

Explicații

Pentru cerința 1 o partiție cu mulțimi de două elemente este

$\{2, 8\}$ $\{1, 9\}$, fiecare submulțime are 2 elemente și suma elementelor egală cu 10.

Pentru cerința 2 sunt 6 partiții 2-speciale:

$\{9\}$ $\{2, 1, 8\}$, cu sumele 9 și 11

$\{2\}$ $\{9, 1, 8\}$, cu sumele 2 și 18

$\{1\}$ $\{9, 2, 8\}$, cu sumele 1 și 19

$\{8\}$ $\{9, 2, 1\}$, cu sumele 8 și 12

$\{9, 2\}$ $\{1, 8\}$, cu sumele 11 și 9

$\{9, 8\}$ $\{1, 2\}$, cu sumele 17 și 3.

Timp maxim de execuție: 6 secunde/test.
Memorie totală disponibilă: 2 MB.
Soluție

*Cerința 1 (**40 puncte**)*

Se ordonează elementele mulțimii A și se afișează partiția:

$\{a[1], a[n]\}, \{a[2], a[n-1]\}, \ldots, \{a[n/2], a[1+n/2]\}$

*Cerința 2 (**60 puncte**)*

Se generează cu backtracking partițiile cu restricțiile din enunț și se numără.

Câștigătorii concursului

Premianții concursului de programare clasică au fost:

Secțiunea A – clasa a IX-a: *Nicolae Andrei*, Școala Gimnazială "Mihai Drumeș", Balș, Olt, premiul I; *Crăciun Mihai*, Colegiul Național "Ion Minulescu", Slatina, Olt, premiul al II-lea; *Paraschiva Octavian Alexandru*, Școala Gimnazială "Eugen Ionescu", Slatina, Olt, premiul al III-lea.

Secțiunea B – clasa a X-a: *Neagu Eric Ștefan*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul I; *Stancu Alexia Elena*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul I; *Apostu Andreea*, Colegiul Național "Zinca Golescu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea, *Păvălache Albert Cristian*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea, *Popescu Maria Alexandra*, Colegiul Național "Zinca Golescu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea, *Rădulescu Andrei Cătălin*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea, *Bratu George Alexandru*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea, *Iordache Alexandru-Mihai*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea, *Păun Robert Cristian*, Colegiul Național "Zinca Golescu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea, *Sandu-Popa Eduard Octavian*, Colegiul Național "Zinca Golescu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea.

Secțiunea C – clasele a XI-a și a XII-a: *Bîlă Alexandru*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul I; *Mitrea David*, Colegiul Național "A. Odobescu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea; *Matea Mihnea Andrei*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea.

Secțiunea D – licență: *Godeanu Sara Estera*, premiul I; *Moldoveanu Andrei Costin*, premiul I; *Florea Cristian Daniel*, premiul al II-lea; *Chelcea Răzvan*, premiul al III-lea.

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

Refinements of classical means inequalities

Dorin Mărghidanu [1]

In this short note, some refinements of the classical inequalities between the arithmetic mean, the geometric mean and the harmonic mean are presented. The expressions that achieve these refinements are also highlighted. Furthermore, these expressions are means too.

We recall that a *(binary) mean* in $S \subset \mathbb{R}$ is a function $M : S \times S \longrightarrow S$ with the property of internality:

$$\min\{a, b\} \leq M(a, b) \leq \max\{a, b\}, \ (\forall)\, a, b \in S.$$

The following properties are specific to many types of means (see e.g. [1], [2]):

- *symmetry*: $M(a, b) = M(b, a), \ (\forall)\, a, b \in S$;
- *homogeneity*: $M(ka, kb) = kM(a, b), \ (\forall)\, a, b \in S, \ (\forall)\, k \in \mathbb{R}_+^*$.

The following two expressions have been introduced in [2]:

$$M_{a,b}(x) = \sqrt{\left(a \sin^2 x + b \cos^2 x\right) \cdot \left(a \cos^2 x + b \sin^2 x\right)},$$

$$\overline{M}_{a,b}(x) = \frac{ab}{\sqrt{\left(a \sin^2 x + b \cos^2 x\right) \cdot \left(a \cos^2 x + b \sin^2 x\right)}}.$$

If a and b are strictly positive real numbers, we denote by

$$A_2(a, b) = \frac{a + b}{2}, \quad G_2(a, b) = \sqrt{ab} \ \text{ and } \ H_2(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

the arithmetic mean, *the geometric mean*, and *the harmonic mean* of numbers a and b, respectively. For all these quantities, the following multiple inequality is established in [2]:

$$A_2(a, b) \geq M_{a,b}(x) \geq G_2(a, b) \geq \overline{M}_{a,b}(x) \geq H_2(a, b), \tag{1}$$

from which we deduce that the expressions $M_{a,b}(x)$ and $\overline{M}_{a,b}(x)$ are in turn means of the numbers a and b, and (1) refines the classical means inequality.

Like as in these expressions, where the coefficients of a and b are $\sin^2 x$ and $\cos^2 x$, which can be regarded as weights (thanks to the fundamental formula of trigonometry), it makes sense to consider the following general weighted expressions.

[1] Profesor dr., Colegiul Național ,,Al. I. Cuza", Corabia, d.marghidanu@gmail.com

Definition 1. *If $a,b>0$ and $p,q\geq 0$, with $p+q=1$, we will denote and define:*

$$M_{a,b}^{p,q}=\sqrt{(pa+qb)\cdot(qa+pb)}\,, \tag{2}$$

$$\overline{M}_{a,b}^{p,q}=\frac{ab}{\sqrt{(pa+qb)\cdot(qa+pb)}}\,. \tag{3}$$

For these expressions we will also have the framing with the classical means.

Proposition 1 (**A refinement of the AM-GM-HM Inequality, binary version**). *If $a,b>0$ and $p,q\geq 0$, with $p+q=1$, then the following chain of inequalities holds:*

$$\frac{a+b}{2}\geq M_{a,b}^{p,q}(x)\geq\sqrt{ab}\geq\overline{M}_{a,b}^{p,q}(x)\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \tag{4}$$

Proof. For the first inequality, by *the GM-AM Inequality* we have

$$M_{a,b}^{p,q}=\sqrt{(pa+qb)\cdot(qa+pb)}\overset{(GM-AM)}{\leq}\frac{(pa+qb)+(qa+pb)}{2}=\frac{a(p+q)+b(p+q)}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

For the second inequality, by *the weighted AM-GM Inequality* we have

$$M_{a,b}^{p,q}=\sqrt{(pa+qb)\cdot(qa+pb)}\overset{(w\ AM-GM)}{\geq}\sqrt{(a^p\cdot b^q)\cdot(a^q\cdot b^p)}=\sqrt{a^{p+q}\cdot b^{p+q}}=\sqrt{a\cdot b}.$$

The last two inequalities from enounce, those regarding the expression $\overline{M}_{a,b}^{p,q}$, are obtained from the first two inequalities by the substitutions $a\to\dfrac{1}{a}$, $b\to\dfrac{1}{b}$. □

Remark 1. From (4), it follows that the quantities $M_{a,b}^{p,q}$ and $\overline{M}_{a,b}^{p,q}$ are means too.

Remark 2. Mean pairs $M_{a,b}(x),\overline{M}_{a,b}(x)$ and $M_{a,b}^{p,q},\overline{M}_{a,b}^{p,q}$ are respectively equivalent, in the sense that they can be obtained from each other.

Indeed, by taking $p=\sin^2 x$ and $q=\cos^2 x$ in $M_{a,b}^{p,q}$, one obtain $M_{a,b}(x)$.

Conversely, by taking $x=\arcsin\sqrt{p}$ in $M_{a,b}(x)$, one obtain $M_{a,b}^{p,q}$.

A similar equivalence can be obtained between $\overline{M}_{a,b}(x)$ and $\overline{M}_{a,b}^{p,q}$.

Although the two pairs of means are equivalent, we prefer the pair $M_{a,b}^{p,q},\overline{M}_{a,b}^{p,q}$, because it also allows a beautiful generalization, which we will detail as follows.

For any strictly positive real numbers $a_1,a_2,\ldots,a_n$, we will consider the following (classical) means of these numbers:

$$\begin{aligned}
A_n[a]&=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} && -\text{ the arithmetic mean,}\\
G_n[a]&=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} && -\text{ the geometric mean,}\\
H_n[a]&=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} && -\text{ the harmonic mean.}
\end{aligned}$$

As in the binary case, we will consider the following general version of the expressions from the relations (2) and (3).

Definition 2. *For any strictly positive real numbers a_i, $i=\overline{1,n}$, and any $p_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,n}$, such that $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, we will denote and define:*

$$\mathcal{M}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}=\sqrt[n]{\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i+n-1}\right)}, \tag{5}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_{i+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_{i+n-1}}\right)}}, \tag{6}$$

where $a_{n+i}=a_i$, for all $i=\overline{1,n-1}$.

For the expressions (5) and (6), we will also have the following chain with the classical means ([3]).

Proposition 2 (**A refinement of the AM-GM-HM Inequality, n-ary version**). *For any strictly positive real numbers a_i, $i=\overline{1,n}$ and any $p_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,n}$, such that $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, the following inequalities hold:*

$$A_n[a]\geq\mathcal{M}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}\geq G_n[a]\geq\overline{\mathcal{M}}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}\geq H_n[a].$$

Proof. For the first inequality, by *the GM-AM Inequality* we have

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{a_1,p_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}&=\sqrt[n]{\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i+n-1}\right)}\\&\leq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i+\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_{i+1}+\ldots+\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_{i+n-1}}{n}\\&=\frac{a_1\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}p_i+a_2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}p_i+\ldots+a_n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}{n}\\&=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=A_n[a],\end{aligned}$$

with equality when $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

For the second inequality, by *the weighted $AM-GM$ Inequality*, applied n times, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}&=\sqrt[n]{\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i+n-1}\right)}\\&\geq\sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}a_{i+1}^{p_i}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}a_{i+n-1}^{p_i}\right)}\\&=\sqrt[n]{a_1^{p_1+p_2+\ldots+p_n}\cdot a_2^{p_1+p_2+\ldots+p_n}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_1+p_2+\ldots+p_n}}\\&=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=G_n[a],\end{aligned}$$

with equality when $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

The last two inequalities from enounce, those regarding the expression $\overline{\mathcal{M}}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}$, are obtained from the first two inequalities by the substitutions $a_k \to \dfrac{1}{a_k}$, $k = \overline{1,n}$. □

As a direct consequence of Proposition 2, we derive the following result.

Corollary 1. *Both expressions* $\mathcal{M}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}$ *and* $\overline{\mathcal{M}}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{p_1,p_2,\ldots,p_n}$ *can be expressed as weighted means of the numbers* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

References

[1] P.S. Bullen, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston, 1988.

[2] D. Mărghidanu, *Two Trigonometrical Means that Produce Continuous Refinement of the Inequality of the Classic Means*, OCTOGON Mathematical Magazine, Vol. 12 (2004), no. 2.A., pp. 664–667.

[3] D. Mărghidanu, *Proposed problem*, Mathematical Inequalities, https://www.facebook.com/photo/?fbid=841422251970112&set=gm.3795219314099435&idorvanity=1486244404996949

O întărire a Inegalității lui Nesbitt

Titu Zvonaru[1]

În revista MATINF nr. 9-10/2022 ([1]), domnul Cristinel Mortici a propus următoarea problemă (M 205):

Fie $a \geq b \geq c > 0$ astfel încât $ab + bc + ca = 1$. Demonstrați că

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{3}(a-c)^2.$$

Observăm că dacă înlocuim fracția $\frac{1}{3}$ cu un număr mai mare, atunci inegalitatea este mai tare. Ne propunem să determinăm cel mai mare număr real k astfel încât să fie adevărată inegalitatea

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + k(a-c)^2, \tag{1}$$

pentru orice $a \geq b \geq c > 0$ astfel încât $ab + bc + ca = 1$.

Pentru a avea o inegalitate omogenă, vom scrie relația (1) sub forma

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{k(a-c)^2}{ab+bc+ca}. \tag{2}$$

Deoarece $a \geq b \geq c > 0$, există numerele reale $x, y \geq 0$ astfel încât

$$b = c + x, \quad a = c + x + y.$$

După efectuarea calculelor, inegalitatea (2) devine

$$2k \leq \frac{N}{M}, \tag{3}$$

unde

$$\begin{aligned} N &= 12c^3(x^2+xy+y^2) + c^2\left(22x^3+33x^2y+39xy^2+14y^3\right) \\ &\quad + c\left(12x^4+24x^3y+34x^2y^2+22xy^3+4y^4\right) + 2x^5+5x^4y+8x^3y^2+7x^2y^3+2xy^4, \\ M &= 8c^3\left(x^2+2xy+y^2\right) + 8c^2\left(2x^3+5x^2y+4xy^2+y^3\right) \\ &\quad + 2c\left(5x^4+15x^3y+16x^2y^2+7xy^3+y^4\right) + 2x^5+7x^4y+9x^3y^2+5x^2y^3+xy^4. \end{aligned}$$

Considerând $c \to 0$, inegalitatea (3) devine

$$2k \leq \frac{2x^4+5x^3y+8x^2y^2+7xy^3+2y^4}{2x^4+7x^3y+9x^2y^2+5xy^3+y^4}. \tag{4}$$

[1]Comănești, tzvonaru@gmail.com

Deoarece $2x^4+5x^3y+8x^2y^2+7xy^3+2y^4=(2x+y)(x+y)(x^2+xy+2y^2)$ și $2x^4+7x^3y+9x^2y^2+5xy^3+y^4=(2x+y)(x+y)^3$, relația (4) devine

$$2k\leq\frac{x^2+xy+2y^2}{(x+y)^2}. \tag{5}$$

Minimul fracției $f(t)=\dfrac{t^2+t+2}{t^2+2t+1}$ poate fi determinat cu ajutorul derivatei. Prezentăm o soluție fără elemente de analiză. Să găsim numărul real m astfel încât $\dfrac{t^2+t+2}{t^2+2t+1}\geq m$. Această inegalitate se scrie

$$(m-1)t^2+(2m-1)t+m-2\leq 0. \tag{6}$$

Inegalitatea (6) este adevărată pentru orice t dacă $m<1$ și $(2m-1)^2-4(m-1)(m-2)\leq 0$. Deducem că $8m\leq 7$ și atunci luăm $m=\dfrac{7}{8}$. Cum $f(3)=\dfrac{7}{8}$, rezultă că $m=\dfrac{7}{8}$ este și minimul lui $f(t)$ pentru $t>0$.

Din relația (5) rezultă $k\leq\dfrac{7}{16}$.

Pentru a finaliza demonstrația, rămâne de verificat inegalitatea

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}+\frac{7}{16}\cdot\frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca}. \tag{7}$$

Procedăm ca mai sus. Fie $x,y\geq 0$, cu $b=c+x$, $a=c+x+y$. Inegalitatea (7) devine

$$8c^3\left(5x^2-2xy+5y^2\right)+8c^2\left(8x^3-2x^2y+11xy^2+7y^3\right)+$$
$$+2c\left(13x^4-9x^3y+24x^2y^2+39xy^3+9y^4\right)+2x^5-9x^4y+x^3y^2+21x^2y^3+9xy^4\geq 0. \tag{8}$$

Inegalitatea (8) este adevărată, deoarece $x^2+y^2\geq 2xy$, $x^3+xy^2\geq 2x^2y$, $5x^4+5x^2y^2\geq 10x^3y\geq 9x^3y$ și $2x^5-9x^4y+x^3y^2+21x^2y^3+9xy^4=x(x-3y)^2(2x^2+3xy+y^2)\geq 0$.

Pentru a sublinia faptul că atât inegalitatea de pornire cât și cea obținută constituie întăriri ale *Inegalității lui Nesbitt*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},\ \forall\, a,b,c>0,$$

reformulăm rezultatul obținut astfel:

Dacă $a,b,c\geq 0$ *cu* $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$, *atunci este adevărată inegalitatea*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}+\frac{7}{16\,(ab+bc+ca)}\cdot\max\left\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\right\}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$ *sau* $(a,b,c)=(4p,3p,0)$ *și permutările sale, unde* p *este un număr real strict pozitiv.*

Bibliografie

[1] Revista MATINF, anul V (2022), nr. 9-10, `http://matinf.upit.ro/MATINF9_10/index.html`

În legătură cu Problema 28569 din G.M.-B nr. 4/2023

Costel Bălcău [1] *și Romina-Ana-Maria Brănescu* [2]

Problema 28569 din Gazeta Matematică Seria B nr. 4/2023, propusă la Clasa a IX-a de *Iulia Sanda*, Craiova, are următorul enunț:

Determinați perechile de numere naturale nenule (k, n) *pentru care* $k < n$ *și*

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + \ldots + n^3.$$

Soluție. Egalitatea din enunț este echivalentă cu

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 2\left(1^3 + 2^3 + \ldots + k^3\right).$$

Dar $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, deci egalitatea devine, succesiv:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2 \cdot \frac{k^2(k+1)^2}{4}, \quad \frac{n(n+1)}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sqrt{2} = \frac{n(n+1)}{k(k+1)}, \text{ fals.}$$

Așadar nu există perechi (k, n) care să verifice egalitatea dată.

Considerăm acum următoarea problemă asemănătoare:

Arătați că există o infinitate de perechi (k, n) *de numere naturale nenule astfel încât* $k < n$ *și*

$$3\left(1^3 + 2^3 + \ldots + k^3\right) = (k+1)^3 + (k+2)^3 + \ldots + n^3.$$

Soluție. Egalitatea din enunț devine, succesiv:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 4\left(1^3 + 2^3 + \ldots + k^3\right),$$
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 4 \cdot \frac{k^2(k+1)^2}{4}, \quad n(n+1) = 2k(k+1).$$

Astfel, putem rescrie, succesiv:

$$n^2 + n = 2k^2 + 2k, \quad 4n^2 + 4n = 8k^2 + 8k,$$
$$(2n+1)^2 - 1 = 2(2k+1)^2 - 2, \quad (2n+1)^2 - 2(2k+1)^2 = -1.$$

Notând $\begin{cases} 2n+1 = x \\ 2k+1 = y \end{cases}$, obținem *ecuația Pell negativă*

$$x^2 - 2y^2 = -1, \ x, y \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

[1] Conf. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, costel.balcau@upb.ro

[2] Profesor, Școala Gimnazială „Nicolae Coculescu", Scornicești, rominabranescu23@gmail.com

Evident, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ este soluție fundamentală (adică soluția (x, y) pentru care expresia $x + y\sqrt{2}$ este minimă). Cum

$$-1 = x_0^2 - 2y_0^2 = \left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)\left(x_0 - y_0\sqrt{2}\right),$$

rezultă că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, avem

$$-1 = (-1)^{2m+1} = \left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)^{2m+1}\left(x_0 - y_0\sqrt{2}\right)^{2m+1}.$$

Dar, conform *Binomului lui Newton*, avem

$$\begin{cases} \left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)^{2m+1} = x_m + y_m\sqrt{2} \\ \left(x_0 - y_0\sqrt{2}\right)^{2m+1} = x_m - y_m\sqrt{2} \end{cases}, \text{ cu } x_m, y_m \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare

$$-1 = \left(x_m + y_m\sqrt{2}\right)\left(x_m - y_m\sqrt{2}\right) = x_m^2 - 2y_m^2.$$

Astfel (x_m, y_m) este soluție a ecuației (1), pentru orice $m \in \mathbb{N}$ (mai mult, conform teoriei ecuațiilor Pell, orice soluție are această formă).

Deoarece

$$\begin{aligned} x_m + y_m\sqrt{2} &= \left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)^{2m+1} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^{2m+1} \\ &= \left(1 + \sqrt{2}\right)^2\left(1 + \sqrt{2}\right)^{2m-1} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(x_{m-1} + y_{m-1}\sqrt{2}\right) \\ &= (3x_{m-1} + 4y_{m-1}) + (2x_{m-1} + 3y_{m-1})\sqrt{2}, \end{aligned}$$

rezultă că soluțiile (x_m, y_m) ale ecuației (1) verifică relațiile de recurență

$$\begin{cases} x_m = 3x_{m-1} + 4y_{m-1} \\ y_m = 2x_{m-1} + 3y_{m-1} \end{cases}, \text{ pentru orice } m \in \mathbb{N}^*, \text{ unde } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}.$$

Prin inducție după $m \in \mathbb{N}$ se obține că x_m și y_m sunt numere naturale impare. Prin urmare șirurile $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ și $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sunt strict crescătoare.

Înlocuind $\begin{cases} x_m = 2n_m + 1 \\ y_m = 2k_m + 1 \end{cases}$, rezultă că soluțiile (k_m, n_m), $m \in \mathbb{N}^*$, ale problemei propuse sunt date de relațiile de recurență

$$\begin{cases} k_m = 3k_{m-1} + 2n_{m-1} + 2 \\ n_m = 4k_{m-1} + 3n_{m-1} + 3 \end{cases}, \text{ pentru orice } m \in \mathbb{N}^*, \text{ unde } \begin{cases} k_0 = 0 \\ n_0 = 0 \end{cases}.$$

Evident, $k_m < n_m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, iar șirurile $(k_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ și $(n_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sunt strict crescătoare, așadar problema are o infinitate de soluții.

De exemplu, primele zece soluții sunt:

$$(k_1, n_1) = (2, 3),\ (k_2, n_2) = (14, 20),\ (k_3, n_3) = (84, 119),\ (k_4, n_4) = (492, 696),$$
$$(k_5, n_5) = (2870, 4059),\ (k_6, n_6) = (16730, 23660),\ (k_7, n_7) = (97512, 137903),$$
$$(k_8, n_8) = (568344, 803760),\ (k_9, n_9) = (3312554, 4684659),\ (k_{10}, n_{10}) = (19306982, 27304196).$$

Bibliografie

[1] *Gazeta Matematică Seria B*, nr. 4/2023.

Asupra unor probleme date la concursurile de titularizare și definitivare în învățământ din iulie 2023

Daniel Jinga [1]

La concursul de titularizare din 12 iulie 2023 a fost propusă următoarea problemă:

Problema 1. *Fie funcția* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{4x^2+1}$.

Demonstrați că $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{x-f(x)}{x^3}\,dx=\frac{9}{8}+\ln 2.$

Soluție. Integrala se scrie

$$I=\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x^3}\,dx=\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+4}\,dx$$
$$=\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+4}\,dx\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{t^2+4}\,dt.$$

Integrând prin părți avem

$$I=t\sqrt{t^2+4}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}}-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}}t\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\,dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{t^2+4-4}{\sqrt{t^2+4}}\,dt$$
$$=\frac{9}{4}-I+4\ln(t+\sqrt{t^2+4})\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}},$$

deci $2I=\dfrac{9}{4}+4\ln\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{9}{4}+4\ln\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\dfrac{9}{4}+4\ln\sqrt{2}=\dfrac{9}{4}+2\ln 2$, deci $I=\dfrac{9}{8}+\ln 2$.

Observația 1. Se poate pune problema calculului tuturor integralelor $I_n=\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{x-f(x)}{x^n}\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, și se poate astfel formula enunțul următor.

Problema 2. *Pentru funcția* f *de la Problema 1, fie* $I_n=\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{x-f(x)}{x^n}\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Demonstrați că $I_0=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$.

b) Demonstrați că $I_1=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

[1]Profesor, Colegiul Național „Ion C. Brătianu”, Pitești, jinga.daniel@yahoo.com

c) Demonstrați că $I_n = \dfrac{1}{n-1}\left[\dfrac{125}{8}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-4} - \dfrac{27}{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-3} - 4(n-4)\cdot I_{n-2}\right]$, *pentru orice* $n \geq 2$.

Soluție. a) Folosind integrarea prin părți, avem

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4x^2+1}\,dx = 2\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\,dx = 2\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{x^2+\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}\,dx \\ &= 2\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} x\cdot\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)'dx + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\Bigg|_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \\ &= 2x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\Bigg|_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} - I_0 + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{2\sqrt{2}+3}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2} - \frac{10}{9} + \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{2}+3}{3}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{9} + \frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{9} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{9} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

b) Avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}\,dx = \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{4x^2+1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx = \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx \\ &= \sqrt{4x^2+1}\Big|_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} + \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\,dx = \sqrt{4x^2+1}\Big|_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} - \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+4}}\,dx \\ &= 3 - \frac{5}{3} - \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+4}\right)\Bigg|_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} + \ln\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3} + \ln\frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

c) Pentru orice $n \geq 2$, avem

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x^n}\,dx = \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x^{n-1}}\,dx = \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{x^2}+4}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'\cdot\frac{1}{x^{n-3}}\,dx \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+4}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{n-3}dx, \end{aligned}$$

deci folosind schimbarea de variabilă $t = \dfrac{1}{x}$ obținem

$$I_n = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} t^{n-3}\cdot\sqrt{t^2+4}\,dt.$$

Acum, utilizând integrarea prin părți avem

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t^{n-1}+4t^{n-3}}{\sqrt{t^2+4}}\,dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{t^2+4}}\,dt + 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t^{n-3}}{\sqrt{t^2+4}}\,dt \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} t^{n-2}\cdot\left(\sqrt{t^2+4}\right)'\,dt + 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} t^{n-4}\cdot\left(\sqrt{t^2+4}\right)'\,dt \\
&= t^{n-2}\cdot\sqrt{t^2+4}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} - (n-2)\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} t^{n-3}\cdot\sqrt{t^2+4}\,dt \\
&\quad + 4t^{n-4}\cdot\sqrt{t^2+4}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} - 4(n-4)\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} t^{n-5}\cdot\sqrt{t^2+4}\,dt \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{5}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} - (n-2)\cdot I_n \\
&\quad + 4\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-4}\cdot\frac{5}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-4}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\right] - 4(n-4)\cdot I_{n-2},
\end{aligned}$$

deci

$$(n-1)I_n = \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-4}\cdot\left(\frac{9}{4}+4\right) - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{2}+4\right) - 4(n-4)I_{n-2},$$

prin urmare

$$I_n = \frac{1}{n-1}\left[\frac{125}{8}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-4} - \frac{27}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-3} - 4(n-4)I_{n-2}\right].$$

Observația 2. Folosind relația de recurență obținută la punctul c), pentru $n=2$ rezultă că

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x^2}\,dx = \frac{125}{8}\cdot\frac{4}{9} - \frac{27}{2}\cdot\sqrt{2} + 8I_0 \\
&\overset{\text{a)}}{=} \frac{125}{18} - \frac{27\sqrt{2}}{2} + 12\sqrt{2} - \frac{40}{9} + 4\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 4\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3},
\end{aligned}$$

iar pentru $n=3$ rezultă că

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{125}{8}\cdot\frac{2}{3} - \frac{27}{2} + 4I_1\right) \\
&\overset{\text{b)}}{=} \frac{1}{2}\left(-\frac{37}{12} + \frac{16}{3} + 2\ln 2\right) = \frac{9}{8} + \ln 2,
\end{aligned}$$

adică se obține problema de la concurs.

La concursul de definitivare in învățământul preuniversitar din 19 iulie 2023 a fost propusă următoarea problemă:

Problema 3. *Fie funcția* $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$.

a) Arătați că $f(x) \leq x$, *pentru orice* $x \in (-1, \infty)$.

b) Se consideră numărul real $a \in (0, 1)$. *Pentru fiecare număr natural* n, *se consideră numărul* $I_n = \displaystyle\int_a^1 \frac{f\left(x^{2n}\right)}{x^n}\, dx$. *Demonstrați că* $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Soluție. a) Fie funcția $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - f(x)$, care este derivabilă și $g'(x) = \dfrac{x}{x+1}$, pentru orice $x > -1$.

Avem $g'(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$, $g'(x) < 0$ pentru orice $x \in (-1, 0)$ și $g'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci g este strict descrescătoare pe $(-1, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$, deci $g(x) \geq g(0) = 0$ pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

b) Evident $\dfrac{f\left(x^{2n}\right)}{x^n} = \dfrac{\ln\left(1 + x^{2n}\right)}{x^n} \geq 0$ pentru orice $x \in [a, 1]$, de unde rezultă că $I_n \geq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, din punctul a) avem $f\left(x^{2n}\right) \leq x^{2n}$ pentru orice $x \in [a, 1]$, deci, prin integrare,

$$I_n \leq \int_a^1 x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^1 = \frac{1}{n+1}\left(1 - a^{n+1}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Astfel

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}\left(1 - a^{n+1}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

și, cum $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$, folosind *Criteriul cleștelui* se obține $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Observația 3. Șirul de integrale $(I_n)_{n\geq 0}$ din problema anterioară are limita 0, deci este convergent. Se poate extinde problema la studiului convergenței șirurilor $\left(n^k I_n\right)_{n\geq 1}$, unde $k \in \mathbb{R}$, și se poate astfel formula enunțul următor.

Problema 4. *Pentru integrala* I_n *de la Problema 3, se consideră șirul* $\left(n^k I_n\right)_{n\geq 1}$, *unde* $k \in \mathbb{R}$.

Determinați valorile lui k *pentru care acest șir este convergent.*

Soluție. Avem $I_n = \displaystyle\int_a^1 \frac{\ln\left(1 + x^{2n}\right)}{x^n}\, dx,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstrăm că

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x,\ \forall\, x \geq 0. \tag{1}$$

A doua inegalitate a fost demonstrată la punctul a) de la problema anterioară. Pentru prima inegalitate, notând

$$h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x),\ x \geq 0,$$

avem

$$h'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = -\frac{x^2}{1+x} \leq 0,$$

deci h este descrescătoare pe $[0,\infty)$, deci $h(x)\le h(0)=0$, adică $x-\dfrac{x^2}{2}\le \ln(1+x)$, pentru orice $x\ge 0$. Demonstrația inegalității (1) este încheiată.

Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in(0,1]$, din (1) avem $x^{2n}-\dfrac{x^{4n}}{2}\le \ln\left(1+x^{2n}\right)\le x^{2n}$, deci

$$x^n-\frac{x^{3n}}{2}\le \frac{\ln\left(1+x^{2n}\right)}{x^n}\le x^n$$

și prin integrare obținem $\displaystyle\int_a^1\left(x^n-\frac{x^{3n}}{2}\right)dx\le I_n\le\int_a^1 x^n\,dx$, adică

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^1-\frac{x^{3n+1}}{2(3n+1)}\Big|_a^1\le I_n\le\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^1,$$

adică $\dfrac{1}{n+1}\left(1-a^{n+1}\right)-\dfrac{1}{2(3n+1)}\left(1-a^{3n+1}\right)\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}\left(1-a^{n+1}\right)$, adică

$$\frac{5n+1}{2(n+1)(3n+1)}-\frac{a^{n+1}}{n+1}+\frac{a^{3n+1}}{2(3n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Astfel, pentru orice $k\in\mathbb{R}$ avem

$$\frac{(5n+1)n^k}{2(n+1)(3n+1)}-\frac{a^{n+1}\cdot n^k}{n+1}+\frac{a^{3n+1}\cdot n^k}{2(3n+1)}\le n^kI_n\le\frac{n^k}{n+1}-\frac{a^{n+1}\cdot n^k}{n+1},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*. \qquad (2)$$

Deoarece $a\in(0,1)$, avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}\cdot n^k}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n+1}\cdot n^k}{2(3n+1)}=0$, pentru orice $k\in\mathbb{R}$.

Cazul 1. Pentru $k<1$ avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)n^k}{2(n+1)(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n+1}=0$, deci, folosind *Criteriul cleștelui*, din (2) se obține $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^kI_n=0$.

Cazul 2. Pentru $k>1$ avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+1)n^k}{2(n+1)(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n+1}=+\infty$, deci, folosind din nou *Criteriul cleștelui*, din (2) se obține acum $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^kI_n=+\infty$.

Cazul 3. Pentru $k=1$ inegalitatea (2) devine

$$\frac{n(5n+1)}{2(n+1)(3n+1)}-\frac{a^{n+1}\cdot n}{n+1}+\frac{a^{3n+1}\cdot n}{2(3n+1)}\le nI_n\le\frac{n}{n+1}-\frac{a^{n+1}\cdot n}{n+1},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

Dar $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(5n+1)}{2(n+1)(3n+1)}-\frac{a^{n+1}\cdot n}{n+1}+\frac{a^{3n+1}\cdot n}{2(3n+1)}\right)=\frac{5}{6}$, iar $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{a^{n+1}\cdot n}{n+1}\right)=1$, deci în acest caz nu ne mai putem ajuta de *Criteriul cleștelui*. Totuși, vom demonstra că șirul $(nI_n)_{n\ge1}$ este convergent, și astfel va rezulta că $\dfrac{5}{6}\le\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI_n\le 1$.

Utilizând integrarea prin părți avem

$$(n-1)I_n=(n-1)\int_a^1\frac{\ln\left(1+x^{2n}\right)}{x^n}\,dx=\int_a^1\left(-\frac{1}{x^{n-1}}\right)'\cdot\ln\left(1+x^{2n}\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{x^{n-1}} \cdot \ln\left(1+x^{2n}\right)\Big|_a^1 + \int_a^1 \frac{1}{x^{n-1}} \cdot \frac{2nx^{2n-1}}{1+x^{2n}}\,dx$$
$$= -\ln 2 + \frac{\ln\left(1+a^{2n}\right)}{a^{n-1}} + 2n\int_a^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx,$$

deci

$$(n-1)I_n = -\ln 2 + \frac{\ln\left(1+a^{2n}\right)}{a^{n-1}} + J_n - K_n, \tag{3}$$

unde $J_n = 2n\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$ și $K_n = 2n\displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$.

Dar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+a^{2n}\right)}{a^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+a^{2n}\right)}{a^{2n}} \cdot a^{n+1} = 1 \cdot 0 = 0,$$

$0 \le K_n \le 2n\displaystyle\int_0^a x^n\,dx = \frac{2na^{n+1}}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deci

$$\lim_{n\to\infty} K_n = 0,$$

iar, utilizând schimbarea de variabilă $x^n = t$, rescriem

$$J_n = 2\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{t}}{1+t^2}\,dt,$$

și din $\sqrt[n-1]{t} \le \sqrt[n]{t} \le 1$ pentru orice $t \in [0.1]$ deducem că șirul $(J_n)_{n\ge1}$ este crescător și mărginit superior de $2\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$, deci este convergent. Astfel din (3) rezultă că șirul $((n-1)I_n)_{n\ge1}$ este convergent, deci, cum $nI_n = \dfrac{n}{n-1} \cdot (n-1)I_n$ (pentru $n \ge 2$), și șirul $(nI_n)_{n\ge1}$ este convergent. Mai mult, avem

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = \lim_{n\to\infty} (n-1)I_n = -\ln 2 + \lim_{n\to\infty} J_n. \tag{4}$$

În concluzie, șirul $\left(n^k I_n\right)_{n\ge1}$ este convergent dacă și numai dacă $k \le 1$.

Observația 4. Evident, avem $0 \le \dfrac{\sqrt[n]{t}}{1+t^2} \le 1$, pentru orice $t \in [0,1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{t}}{1+t^2} = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t = 0 \\ \dfrac{1}{1+t^2}, \text{ pentru } t \in (0.1] \end{cases},$$

conform *Teoremei convergenței dominate* rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{t}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Deci, pentru integrala I_n din problema anterioară, din (4) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{\pi}{2} - \ln 2$ și astfel

$$\lim_{n\to\infty} n^k I_n = \begin{cases} 0, \text{ pentru } k < 1 \\ \dfrac{\pi}{2} - \ln 2, \text{ pentru } k = 1 \\ +\infty, \text{ pentru } k > 1 \end{cases}.$$

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Algoritmul extins al lui Euclid

Viorel Păun [1]

1 Cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun

Cel mai mare divizor comun (prescurtat ***c.m.m.d.c.***) a două sau mai multe numere întregi, care nu sunt toate zero, este cel mai mare număr întreg pozitiv, care împarte fiecare dintre numerele date.

Cel mai mic multiplu comun (prescurtat ***c.m.m.m.c.***) pentru două sau mai multe numere naturale nenule este cel mai mic număr natural care se divide cu toate numerele date.

În matematică, cel mai mare divizor comun a două numere întregi a și b se mai notează și cu (a, b) iar cel mai mic multiplu comun se notează cu $[a, b]$. Dacă unul dintre a și b este zero, cel mai mare divizor comun al lor este egal cu valoarea absolută a numărului diferit de zero: $(0, a) = |a|$, $(a, 0) = |a|$.

Fie a și b două numere naturale strict pozitive.

Dacă considerăm divizorii primi $d_1,\ d_2, \ldots, d_n$ ai numerelor a și b, putem scrie:

$a = d_1^{p_1} \cdot d_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot d_n^{p_n}$,
$b = d_1^{q_1} \cdot d_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot d_n^{q_n}$, unde $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Atunci:

$(a,\ b) = d_1^{\min(p_1,q_1)} \cdot d_2^{\min(p_2,q_2)} \cdot \ldots \cdot d_n^{\min(p_n,q_n)}$,
$[a, b] = d_1^{\max(p_1,q_1)} \cdot d_2^{\max(p_2,q_2)} \cdot \ldots \cdot d_n^{\max(p_n,q_n)}$.

De unde rezultă că $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

Exercițiu

Arătați că:

1. $(a, b, c) = ((a, b), c)$;
2. $(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)]$;
3. $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$.

[1] Lect.univ.dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, viop23@yahoo.com

2 Algoritmul lui Euclid

Fie a și b două numere naturale strict pozitive.

Algoritmul lui Euclid calculează cel mai mare divizor comun al numerelor a și b. Să presupunem că $a > b$.

Se pleacă de la proprietatea că, dacă $d|a$ și $d|b$ atunci $d|(a-b)$ și reciproc, dacă $d|(a-b)$ și $d|b$ atunci $d|a$. Rezultă că mulțimea divizorilor comuni ai numerelor a și b coincide cu mulțimea divizorilor comuni ai numerelor $a-b$ și b, prin urmare c.m.m.d.c. (a,b) = c.m.m.d.c. $(a-b,b)$. Această proprietate ne permite să înlocuim în procesul de calculul al celui mai mare divizor comun, numărul mai mare, presupus a, cu un număr mai mic $a-b$. Repetând acest proces de reducere, obținem numere naturale din ce in ce mai mici astfel încăt după un număr finit de pași, vom ajunge în situația în care numerele a și b devin egale, valoare ce reprezintă c.m.m.d.c. (a,b).

Funcția C++ care implementează acest algoritm este următoarea:

```
int cmmdc(int a,int b)
       {  while(a!=b)
            if(a>b)a=a-b;
            else b=b-a;
          return a;
       }
```

Utilizând operatorul condițional `?:` *putem renunța la instrucțiunea* `if` *astfel:*

```
int cmmdc(int a,int b)
         {
            while(a!=b) a>b?a=a-b:b=b-a;
            return a;
         }
```

Varianta recursivă a acestei funcții este:

```
int cmmdc(int a,int b)
         {
           if(a==b) return a;
           if(a>b) return cmmdc(a-b,b);
           return cmmdc(a,b-a);
         }
```

Algoritmul lui Euclid bazat pe scăderi repetate poate fi îmbunătățit dacă vom micșora, la fiecare pas, numărul mai mare, presupus a, cu $q*b$ unde q este câtul dintre a și b.

Algoritmul folosește următoarea observație:

Fie a și b două numere naturale astfel încât $a = b*q+r$, $q, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < b$.

Se poate demonstra ușor că

$$d|a,\ d|b \Rightarrow d|r \tag{1}$$

și respectiv

$$d|b,\ d|r \Rightarrow d|a. \tag{2}$$

Din (1) si (2) rezultă că mulțimea divizorilor comuni ai numerelor a și b coincide cu mulțimea divizorilor comuni ai numerelor b și r și prin urmare rezultă că $\text{cmmdc}(a, b) = \text{cmmdc}(b, r)$.

Repetând procesul de înlocuire a numărului mai mare (a) cu numărul mai mic (b) și a numărului mai mic (b) cu (r) restul împărțirii dintre a și b, vom obține numere naturale din ce în ce mai mici și după un număr finit de pași vom obține $r = 0$, de unde se deduce că b este divizor al lui a. Cum c.m.m.d.c. al valorilor inițiale ale numerelor a si b coincide cu c.m.m.d.c. al valorilor finale rezultate, după aplicarea procesului de reducere rezultă că b va furniza cel mai mare divizor comun căutat.

Implementarea acestui algoritm este următoarea:

```
int cmmdc(int a,int b )
{
    int r;
    while(b!=0)
    { r=a%b; a=b; b=r; }
    return a;
}
```

Varianta recursivă este:

```
int cmmdc(int a,int b)
 {
   if(b==0) return a;
   return cmmdc(b,a%b);
 }
```

Să încercăm să determinăm complexitatea algoritmului lui Euclid.

Presupunem $a > b$.

Dacă luăm în calcul faptul că dacă $b \leq a/2 \Rightarrow a\%b < b \leq a/2$, iar dacă $b > a/2 \Rightarrow a\%b = a - b < a/2$, rezultă că la fiecare pas numărul mai mare dintre a și b se înjumătățește (cel puțin). Prin urmare complexitatea temporală a algoritmului lui Euclid este $O(\log_2(a))$.

Matematicianul Josef Stein a propus în 1967 [2] ca în calculul celui mai mare divizor comun a două numere naturale, pozitive a, b să se folosească următoarele proprietăți:

$\text{cmmdc}(a, a) = a$;

$\text{cmmdc}(2a, 2b) = 2 \cdot \text{cmmdc}(a, b)$;

$\text{cmmdc}(2a, b) = \text{cmmdc}(a, b)$ dacă b este impar și similar $\text{cmmdc}(a, 2b) = \text{cmmdc}(a, b)$ dacă a este impar;

$\text{cmmdc}(a, b) = \text{cmmdc}(a - b, b)$ dacă a și b sunt numere impare și $a > b$ și similar

$\text{cmmdc}(a, b) = \text{cmmdc}(a, b - a)$ dacă a și b sunt numere impare și $a < b$.

Implementarea în limbajul C a acestui algoritm este:

```
int cmmdcStein(int a,int b)
  {
   if(a==b) return a;
   if(a%2==0&&b%2==0)return 2*cmmdcStein(a/2, b/2);
```

```
 if(a%2==0) return cmmdcStein(a/2, b);
 if(b%2==0)return cmmdcStein(a, b/2);
 if(a>b) return cmmdcStein(a-b, b);
 return cmmdcStein(a,b-a);
}
```

3 Algoritmul extins al lui Euclid

Algoritmul extins al lui Euclid rezolvă următoarea problemă:

Fiind dați doi întregi a și b care nu sunt simultan 0, să se determine cel mai mare divizor comun al lor, d și doi întregi m și n astfel încât $m \cdot a + n \cdot b = d$ (Identitatea lui Bézout).

Pentru obținerea identității $m \cdot a + n \cdot b = d$, se pleacă de la relațiile:

$$1 \cdot a + 0 \cdot b = a, \tag{3}$$

$$0 \cdot a + 1 \cdot b = b, \tag{4}$$

dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$.

Dacă $a < 0$, relația (3) se înlocuiește cu

$$-1 \cdot a + 0 \cdot b = -a.$$

Dacă $b < 0$, relația (4) se înlocuiește cu

$$0 \cdot a + (-1) \cdot b = -b.$$

Fie $m = 1$, $n = 0$ și $m_1 = 0$, $n_1 = 1$.

Obținem relațiile:

$$m \cdot a + n \cdot b = a, \tag{5}$$

$$m_1 \cdot a + n_1 \cdot b = b. \tag{6}$$

Cum cel mai mare divizor comun a două numere nu se modifică dacă din numărul cel mai mare scădem numărul mai mic, deducem că prin repetarea procesului de reducere prin scădere aplicat între relațiile (5) și (6) ajungem în situația în care una din relații are membrul drept egal cu zero.

Cealaltă relație ne furnizează cel mai mare divizor comun și coeficienții m și n ai Identității lui Bezout.

Dacă $a > b$, prin scădere obținem relația

$$(m - m_1)a + (n - n_1)b = a - b.$$

Adică $m \leftarrow m - m_1$ si $n \leftarrow n - n_1$ și continuăm cu

$$m \cdot a + n \cdot b = a,$$

$$(m - m_1)a + (n - n_1)b = a - b.$$

Dacă a și b sunt numere naturale strict pozitive, putem întrerupe procesul de reducere prin scădere aplicat între relațiile (5) și (6) în momentul atingerii egalității între a si b.

Metoda prezentată mai sus, de obținere a coeficienților m și n, reprezintă și o demonstrație (constructivă) a următoarei teoreme:

Teorema 1. *Fie a și b două numere întregi și d c.m.m.d.c. al lor. Atunci există două numere întregi, m și n, astfel încât $d = ma + nb$.*

Funcția C++ ce implementează acest algoritm este:

```
int _cmmdcExtins(int a,int b,int &m, int &n) ///a>0,b>0
  { int m1=0,n1=1;
    m=1,n=0;
    while(a!=b)
      { if(a>b) { m-=m1; n-=n1; a-=b;  }
        else    { m1-=m; n1-=n;  b-=a; }
      }
     return a;
  }
```

Putem optimiza algoritmul astfel: dacă $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ scădem din relația (5) *relația* (6) *multiplicată cu q. Obținem următoarea implementare:*

```
int _cmmdcExtins(int a,int b,int &m, int &n) /// a>0, b>=0
  {   m=1; n=0;
      int m1=0,n1=1,u,v,q,r;
    while(b!=0)
      { q=a/b, r=a%b;
        u=m-q*m1; v=n-q*n1;
        m=m1; n=n1;  a=b;
        m1=u; n1=v; b=r;
      }
    return a;
  }
```

Pentru a obține coeficienții m si n pentru numere a, b întregi oarecare, apelăm adecvat funcția ***_cmmdcExtins*** *fiecărei situații:*

```
int cmmdcExtins(int a,int b, int &m, int &n)
{
    int d;
    if(b==0) { m=1; n=0; return a;}
    if(a==0){m=0,n=1; return b;}
    if(a>0 && b>0) return _cmmdcExtins(a,b,m,n);
    if(a<0 && b<0){d=_cmmdcExtins(-a,-b,m,n); m=-m;n=-n; return d;}
    if(a<0){d=_cmmdcExtins(-a,b,m,n); m=-m; return d;}
    if(b<0){d=_cmmdcExtins(a,-b,m,n); n=-n; return d;}
}
```

Varianta recursivă a algoritmului extins al lui Euclid este următoarea:

```
int _cmmdcExtinsR(int a, int b,int &m, int &n)  ///a>0,b>=0
    {
        if(b==0){m=1; n=0; return a;}
        int d=_cmmdcExtinsR(b,a % b, n, m);
        n=n-(a/b)*m;
        return d;
    }
```

Pentru a înțelege modul de lucru al acestui cod, ne uităm mai întâi la modul recursiv de obținere al cmmdc(a, b), algoritm inclus și în ***_cmmdcExtinsR:***

```
int cmmdc(int a,int b)
 {
   if(b==0) return a;
   return cmmdc(b,a%b);
 }
```

Acest algoritm calculează continuu restul $a\%b$ înlocuind valorile lui a și b cu b și $a\%b$ până când restul devine 0, restul final diferit de 0 fiind cel mai mare divizor comun.

În algoritmul extins al lui Euclid, odată găsit cel mai mare divizor comun d, trebuie să determinăm valorile m și n care să respecte relația $ma + nb = d$.

Observăm că aici condiția de terminare a algoritmului, este $b = 0$ și $a = d$ (cel mai mare divizor comun).

Construim astfel relația $1 \cdot d + 0 \cdot r = d$ adică $m = 1$ și $n = 0$ pentru valorile finale ale lui a și b.

Apoi revenim la starea anterioară a algoritmului, știind că cmmdc$(a, b) = d$ este determinat.

Acum după apelul `d = _cmmdcExtinsR(b,a % b, n, m)`, avem o soluție de forma $n_1 b + m_1(a\%b) = d$.

Pentru menținerea relației $m \cdot a + n \cdot b = d$, unde a și b sunt valori intermediare și d este valoare finală, vom actualiza variabilele m și n cu valorile care rezultă din următoarele relații:

$$a\%b = a - [a/b] \cdot b$$
$$\Rightarrow n_1 \cdot b + m_1 \cdot (a - [a/b] \cdot b) = d$$
$$\Rightarrow m_1 \cdot a + (n_1 - [a/b] \cdot m_1) \cdot b = d,$$

de unde rezultă valorile actualizate: $m = m_1$, $n = n_1 - [a/b] \cdot m_1)$.

Ne întoarcem continuu la starea anterioară prin recursivitate, până când ajungem în starea inițială și astfel obținem soluția $ma + nb = d$.

Funcția C++ ce implementează acest algoritm este:

```
int cmmdcExtins(int a,int b, int &m, int &n)
{
    int d;
    if(b==0){m=1;n=0; return a;}
    if(a==0){m=0,n=1; return b;}
```

```
    if(a>0 && b>0) return _cmmdcExtinsR(a,b,m,n);
    if(a<0 && b<0){d=_cmmdcExtinsR(-a,-b,m,n); m=-m;n=-n; return d;}
    if(a<0){d=_cmmdcExtinsR(-a,b,m,n); m=-m; return d;}
    d=_cmmdcExtinsR(a,-b,m,n); n=-n; return d;
}
```

4 Aplicație. Rezolvarea ecuației liniare diofantice $ax + by = c$

Să se determine soluția generală a ecuației diofantice

$$a \cdot x + b \cdot y = c,\ a, b, c \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Soluție. Fie $d = (a, b)$. Ecuația (7) are soluții dacă și numai dacă $d|c$.

Într-adevăr, dacă există x_0, y_0 astfel încât $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c$, cum $d = (a, b) \Rightarrow d|a,\ d|b$ deci $d|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c$.

Dacă $d|c \Rightarrow (\exists)\, q$ astfel încât $c = q \cdot d$. Cum $d = (a, b) \Rightarrow (\exists)\, m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = m \cdot a + n \cdot b \Rightarrow q \cdot d = q \cdot m \cdot a + q \cdot n \cdot b \Rightarrow$ perechea $(q \cdot m, q \cdot n)$ este soluție a ecuației (7).

Fie perechea (x_0, y_0) o soluție particulară și perechea (x, y) o soluție oarecare pentru ecuația (7).

Avem $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c$, $a \cdot x + b \cdot y = c$ și deducem că $a\,(x - x_0) = -b(y - y_0)$.

Cum $d = (a, b) \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Deoarece $\frac{a}{d} \cdot (x - x_0) = -\frac{b}{d} \cdot (y - y_0) \Rightarrow \frac{b}{d} |\, (x - x_0) \Rightarrow x - x_0 = -\frac{b}{d} \cdot t \Rightarrow$

$$x = x_0 - \frac{b}{d} \cdot t, y = y_0 + \frac{a}{d} \cdot t, t \in \mathbb{Z}.$$

Implementarea acestui algoritm este următoarea:

```
#include <iostream>
#include<cmath>

using namespace std;

int _cmmdcExtins(int a, int b,int &m, int &n)  ///a>0,b>=0
    {
        if ( b== 0) { m = 1; n = 0;  return a;  }
        int d = _cmmdcExtins(b,a % b, n, m);
            n=n-(a/b)*m;
        return d;
    }

 int cmmdcExtins(int a,int b, int &m, int &n)
 {
     int d;
     if(b==0) { m=1; n=0; return a;}
```

```
      if(a==0){m=0,n=1; return b;}
      if(a>0 && b>0) return _cmmdcExtins(a,b,m,n);
      if(a<0 && b<0){d=_cmmdcExtins(-a,-b,m,n); m=-m;n=-n; return d;}
      if(a<0){d=_cmmdcExtins(-a,b,m,n); m=-m; return d;}
      if(b<0){d=_cmmdcExtins(a,-b,m,n); n=-n; return d;}
 }

bool diofant(int a,int b, int c, int &x0, int &y0, int &x1, int &y1)
{    /// ax0 + by0 = c;  ax1 +by1=0
   int m, n, d=cmmdcExtins(a,b,m,n);
   if(c%d!=0)return false;
   int q=c/d;
   x0=m*q;  y0=n*q;
   x1=-b/d; y1=a/d;
     /// solutia generala x = x0 + x1*t, y = y0 + y1*t
   return true;
}

int main()
{ int a,b,c,x0,y0,x1,y1;
  cout<<"a,b,c=";
  cin>>a>>b>>c;

  int raspuns=diofant(a,b,c,x0,y0,x1,y1);
  if(raspuns=false){cout <<"ec nu are solutie"; return 0; }
  cout<<"x="<<x0<<showpos<<x1<<"*t"<<noshowpos<<endl;
  cout<<"y="<<y0<<showpos<<y1<<"*t"<<noshowpos<<endl;
    return 0;
}
```

5 Probleme propuse

1. Fie a și b două numere naturale nenule, $a \leq b$. Găsiți toate perechile de numere naturale x, y astfel încât $(x, y) = a$ și $[x, y] = b$.
2. În planul xOy, prin câte puncte (x, y), x, y numere naturale, trece segmentul de dreaptă care unește punctele $(0, 0)$ și (m, n), unde m, n sunt numere naturale?
3. *Problema balanței.* Avem o balanță și două tipuri de greutăți a și b. Care este numărul minim de greutăți de care avem nevoie pentru a cântări un produs cu greutatea c, dacă acest lucru este posibil? $(a, b, c$ sunt numere naturale nenule).

Bibliografie

[1] D.E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor. Algoritmi Fundamentali*, Editura Tehnică, 1974.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_GCD_algorithm

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Greatest_common_divisor

RUBRICA DE ROBOTICĂ ȘI MEDII GRAFICE DE PROGRAMARE

Medii grafice interactive. Implementarea algoritmilor care conțin structura secvențială în mediul grafic Scratch

Doru Anastasiu Popescu [1]

În mediul grafic interactiv Scratch blocurile care nu conțin expresii logice vor fi considerate ca fiind instrucțiuni secvențiale (structuri secvențiale). Dintre aceste blocuri, cele mai uzuale sunt: blocurile de mișcare, blocurile de aspect, blocurile de sunet, blocurile de configurare a creionului, blocurile de setare a variabilelor (date). În continuare vom prezenta câteva probleme ce se rezolvă cu aceste blocuri în Scratch, iar în partea finală propunem spre rezolvare câteva probleme, pentru a familiariza cititorii cu algoritmii secvențiali.

Problema 1 (***Suma lui Gauss***)**.** *Terra, o fetiță deșteaptă foc, dorește să scrie un script care să conțină o imagine cu o fetiță care să meargă n pixeli și să determine suma S a lui Gauss pentru n dat, $n < 10000$. Suma lui Gauss este $S = 1 + 2 + \ldots + n$.*

Exemplu: pentru $n = 100$, rezultatul este $S = 5050$.

Soluție. Rezolvarea problemei cu ajutorul unui script, presupune:

- alegerea unui actor;
- crearea a două variabile n și S;
- setarea variabilei n cu o valoare mai mică decât 10000;
- setarea variabilei S folosind formula lui Gauss:
$$S = \frac{n(n+1)}{2};$$
- afișarea valorii variabilei S.

Scriptul de rezolvare al problemei cu suma lui Gauss

Problema 2 (***Problema zbor***)**.** *Alegeți un fluture ca personaj pentru scenă și apoi scrieți un script pentru simularea zborului acestuia.*

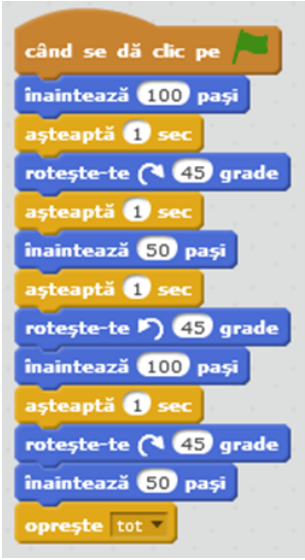
Soluție. O variantă de script care rezolvă problema este cea din imaginea alăturată.

[1]Conf. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, doru.popescu0301@upb.ro

Acest script simulează zborul:

- deplasează fluturele înainte cu 100 pixeli;
- îl rotește în jos;
- apoi îl deplasează în jos cu 50 pixeli;
- îl rotește înapoi cu aceeași valoare;
- și îl deplasează în sus cu 100 pixeli pentru a crește înălțimea zborului.

Blocurile pentru aceste operații se pot scrie de mai multe ori pentru a prelungi zborul pe o distanță mai mare.



Scriptul de rezolvare al problemei zbor

Problema 3 (***Problema gândacului***)**.** *Deplasați un gândac pe laturile unui dreptunghi cu laturile paralele cu marginile scenei, pornind din colțul din stânga-jos astfel încât prima direcție este în dreapta și la sfârșit să ajungă de unde a plecat. Lungimea dreptunghiului și lățimea vor fi generate aleator din mulțimea* $\{200, \ldots, 400\}$*. La fiecare schimbare de direcție gândacul se odihnește 2 secunde.*

Soluție.

La început se caută în arhiva cu imagini un fișier cu imaginea unui gândac și apoi îi asociem două variabile a și b pentru dimensiunile traseului.

Scriptul prezentat în imagine conține blocuri pentru:

- inițializarea lungimii și lățimii traseului dreptunghiular folosind generatorul de numere aleatoare;
- poziționarea inițială a gândacului;
- înaintare, rotire și așteptare.

când se dă clic pe
setează a la alege un număr aleatoriu între 300 și 400
setează b la alege un număr aleatoriu între 200 și 300
du-te la x: -181 y: -112
înaintează a pași
așteaptă 1 sec
rotește-te 90 grade
așteaptă 1 sec
înaintează b pași
așteaptă 1 sec
rotește-te 90 grade
așteaptă 1 sec
înaintează a pași
așteaptă 1 sec
rotește-te 90 grade
așteaptă 1 sec
înaintează b pași
așteaptă 1 sec
rotește-te 90 grade
oprește tot

Scriptul de rezolvare al problemei gândacului

Probleme propuse spre rezolvare

Pentru fiecare din problemele următoare, scrieți câte un script folosind mediul grafic interactiv Scratch.

1. Generați aleator n, un număr natural cu maxim 3 cifre, și apoi afișați numărul de numere impare mai mici sau egale cu n.
2. Alegeți o pasăre din biblioteca de personaje și apoi realizați deplasarea ei pe un contur în formă de triunghi. La fiecare schimbare de direcție se va avertiza sonor printr-un sunet specific păsării.
3. Creați un decor cu o trambulină și un băiețel, care sare de 4 ori în sus și apoi revine de unde a sărit.
4. Generați aleator în a și b două valori cu exact două cifre și apoi deplasați pe orizontală la dreapta o mașină pe o distanță egală cu $300 + a$ și apoi înapoi pe o distanță $200 + b$. Între cele două deplasări se va face o oprire de 3 secunde.
5. Generați aleator un număr natural nenul L cu trei cifre și mai mic sau egal cu 300. Deplasați din marginea dreaptă a scenei un elefant pe orizontală cu L pixeli spre marginea din stânga.
6. Un robot se deplasează pe cele patru direcții: Nord, Sud, Est și Vest. Cunoscând distanța în pixeli parcursă în cele patru direcții, determinați câți pixeli a mers pe orizontală, respectiv verticală.

Bibliografie

[1] https://scratch.mit.edu/scratch2download/

[2] D.A. Popescu, S. Profeanu, S. Dobrescu, *Manual de Informatică și TIC, clasa a V-a*, Editura CD Press, 2022.

[3] D.A. Popescu, *Elemente de interfață specifice mediului grafic interactiv Scratch*, MATINF, anul 4, nr. 8, 2021.

Algoritmi în medii grafice interactive. Implementarea algoritmilor care conțin structura alternativă în mediul grafic interactiv Scratch

Ion Alexandru Popescu [1]

Structura alternativă este reprezentată în mediul grafic interactiv Scratch prin blocurile *dacă* și *dacă - altfel* din grupul de blocuri *Control*. Modul de funcționare al acestor blocuri este același ca la reprezentarea algoritmilor prin schemele logice și pseudocod. Pentru a exemplifica modul de funcționare al acestor blocuri, vom prezenta scripturile pentru problemele prezentate în secțiunile dedicate noțiunilor introductive despre algoritmi.

Blocuri pentru structuri alternative

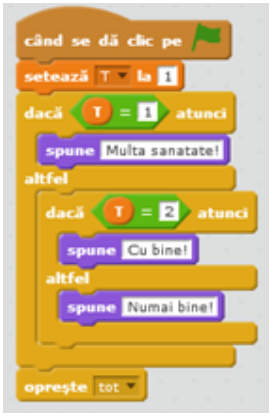
Problema 1 (***Problema telefonului***). *Dani, băiat politicos, are diferite modalități de a saluta la telefon în funcție de persoana cu care se întâlnește. Dacă o variabilă T are valoarea 1 va saluta cu ,,Multa sanatate!", dacă T are valoarea 2 va saluta cu ,,Cu bine!", iar pentru alte valori ale lui T va saluta cu ,,Numai bine!".*
Exemplu: *pentru $T = 1$, Dani va saluta cu ,,Multa sanatate!"*

Soluție. Proiectul pentru această problemă a fost construit parcurgând etapele:

- alegerea personajului pentru scenă (Dani, din biblioteca de personaje);
- crearea variabilei T;
- introducerea a două blocuri *dacă – altfel* pentru verificarea situațiilor de răspuns la telefon;
- introducerea blocurilor de afișare pentru fiecare caz în parte, în funcție de valoarea lui T.

[1]Student, Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, alexionpopescu@gmail.com

Personajul problemei telefonului

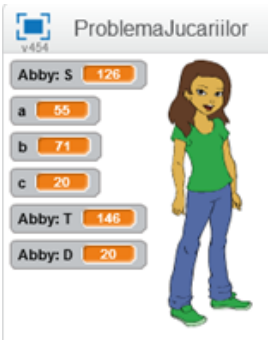


Scriptul problemei telefonului

Problema 2 (***Problema jucăriilor***). *Abby a economisit o sumă S de bani ca să-și cumpere 3 jucării. Când ajunge la magazin, află faptul că aceste 3 jucării au prețurile a, b și c. Ajutați-o pe Abby să verifice dacă poate cumpăra jucăriile.*
Exemplu: *pentru $S = 126$, $a = 55$, $b = 71$, $c = 20$, răspunsul este Nu pot cumpara jucariile! Necesar 20 lei.*

Soluție. Proiectul pentru această problemă a fost construit parcurgând etapele:

- selectarea personajului pentru scenă (Abby, din biblioteca de personaje);
- poziționarea pe scenă a personajului și crearea variabilelor necesare rezolvării problemei (a, b, c, T, S);
- introducerea în script a blocurilor de început: start, înaintarea personajului spre magazin pe o distanță de 50 pixeli, afișarea unui text, așteptare o secundă;
- setarea variabilelor cu valorile corespunzătoare;
- efectuarea comparărilor necesare și selectarea celor două cazuri folosind structura alternativă *dacă – altfel*;
- introducerea în corpul blocului *dacă – altfel* a blocurilor de afișare și setare a variabilei D.



Abby și valorile variabilelor

când se dă clic pe
anulează efectele grafice
înaintează 50 pași
spune Am ajuns la magazinul de jucarii!
așteaptă 1 sec
setează S la 126
afișează variabila S
setează a la 55
setează b la 71
setează c la 20
setează T la a + b + c
dacă S > T sau S = T atunci
spune DA, pot cumpara jucariile!
setează D la S - T
afișează variabila D
altfel
spune Nu, ma imprumut de la Maria!
setează D la T - S
afișează variabila D
oprește tot

Scriptul de la problema jucăriilor

Problema 3 (***Problema auto***). *Mașina Car-Bug consumă benzină diferit în localitate, respectiv în afara localității. Prețul unui litru de bezină este L. Se știe că în oraș mașina consumă C litri de benzină la 100 km, iar în afara localității D litri de benzină la 100 km. Cunoscând faptul că mașina a mers într-o zi A km în oraș și B km în afara localității, se cere să se determine de câți bani a avut nevoie pentru deplasare și unde a cheltuit mai mult, în localitate sau în afara localității.*
Exemplu: *pentru $L = 5$, $A = 200$, $B = 300$, $C = 10$, $D = 6$ se va afișa 190 și In localitate.*

Soluție. Proiectul pentru această problemă a fost construit parcurgând etapele:

- selectarea personajului pentru scenă (Car-Bug, din biblioteca de personaje);
- poziționarea pe scenă a personajului și definirea variabilelor A, B, C, D, L, X, Y, S;
- setarea variabilelor cu valorile corespunzătoare;
- introducerea blocului de afișare a valorii lui S;
- verificarea condițiilor legate de X și Y folosind 3 blocuri *dacă* și afișarea mesajelor corespunzătoare.

Car-Bug și valorile variabilelor

când se dă clic pe
înaintează 50 pași
setează A la 200
setează B la 300
setează L la 5
setează C la 10
setează D la 6
setează X la A * C / 100 * L
setează Y la B * D / 100 * L
setează S la X + Y
afișează variabila S
dacă X > Y atunci
spune In localitate!
dacă X < Y atunci
spune In afara localitatii!
dacă X = Y atunci
spune Consumul a fost la fel!
oprește acest script

Scriptul pentru problema auto

Probleme propuse spre rezolvare

Pentru fiecare din problemele următoare, scrieți câte un script folosind mediul grafic interactiv Scratch.

1. Se dau valorile pentru numerele a, b, c, d și se cere să se verifice dacă acestea sunt numere consecutive crescător. În caz afirmativ, se va determina suma lor, iar în caz contrar produsul lor.
2. Se dau valorile pentru numerele a, b, c și se cere să se verifice dacă acestea sunt toate pare.
3. Se dau lungimile laturilor unui dreptunghi și lungimea laturii unui pătrat. Se cere să se determine care dintre cele două figuri geometrice are perimetrul mai mare.

4. Mircea a fost în vacanța de vară la Disneyland-ul din Paris, unde a vizitat mai multe standuri. La 4 dintre acestea a petrecut mai mult timp. Cunoscând numărul de minute petrecute la fiecare dintre acestea (notate cu $N1, N2, N3, N4$) se cere să se determine:

   a) numărul de minute petrecute la toate aceste standuri;

   b) numărul maxim de minute pe care le-a stat la unul dintre aceste standuri.
5. Pe laturile unui pătrat se deplasează un gândac. Știind numărul de contururi parcurse complet în două zile, precum și lungimea laturii pătratului, se cere să se determine în care din cele două zile a parcurs o distanță mai mare și care este această distanță.

Bibliografie

[1] https://scratch.mit.edu/scratch2download/

[2] D.A. Popescu, S. Profeanu, S. Dobrescu, *Manual de Informatică și TIC, clasa a V-a*, Editura CD Press, 2022.

[3] D.A. Popescu, *Elemente de interfață specifice mediului grafic interactiv Scratch*, MATINF, anul 4, nr. 8, 2021.

[4] D.A. Popescu, *Bazele programării - Limbajul C++*, Infobits Academy, 2021.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Raluca Mihaela Georgescu [1]

SUBIECTUL I

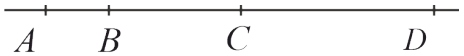
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $(2^3)^3 - 2^3 \cdot 2^5 - 2^9 : 2$ este:
   a) 2; b) 2^8; c) 0; d) 1.
2. Dacă $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, atunci $9x^2 - 4y^2 =$
   a) 2; b) 0; c) 3; d) 6.
3. Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-2\sqrt{2}, 3)$ este:
   a) 3; b) 2; c) -3; d) -2.
4. Cel mai mic număr din mulțimea $\left\{\frac{21}{9}, \frac{23}{10}, \frac{2309}{990}, \frac{209}{90}\right\}$ este:
   a) $\frac{21}{9}$; b) $\frac{23}{10}$; c) $\frac{2309}{990}$; d) $\frac{209}{90}$.
5. Pătratul numărului $|2\sqrt{2} - 3| - (5 - \sqrt{8})$ este:
   a) 4; b) -4; c) -2 d) 8.
6. Andrei afirmă că dacă $x - \frac{1}{x} = 2$, atunci $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Afirmația lui este:
   a) Adevărată; b) Falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

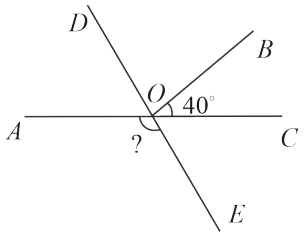
1. În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, D, în această ordine,



   astfel încât $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$, $AB = 6$ cm, iar D este simetricul lui A față de C.
   Lungimea segmentului CD este:
   a) 10 cm; b) 9 cm; c) 15 cm; d) 30 cm.

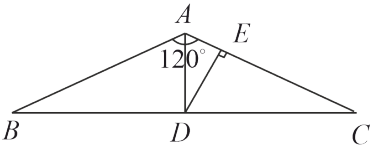
[1]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, raluca.georgescu76@upb.ro

2. În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente suplementare $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$, OD bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, iar OE este semidreapta opusă semidreptei OD. Dacă $m(\widehat{BOC}) = 40°$, atunci $m(\widehat{AOE})$ este:



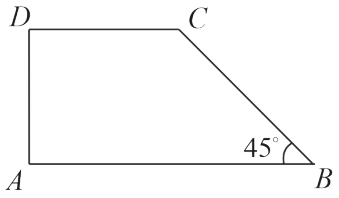
a) 60°; b) 70°; c) 100°; d) 110°.

3. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC = 20$ cm și $m(\widehat{BAC}) = 120°$ se consideră D mijlocul laturii BC și $DE \perp AC$. Lungimea segmentului EC este:



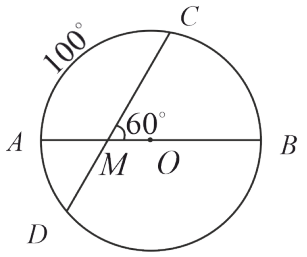
a) 15 cm; b) 10 cm; c) 5 cm; d) $5\sqrt{3}$ cm.

4. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $\dfrac{DC}{AB} = \dfrac{2}{3}$, $AD = 6$ cm și $m(\widehat{ABC}) = 45°$. Aria trapezului este:



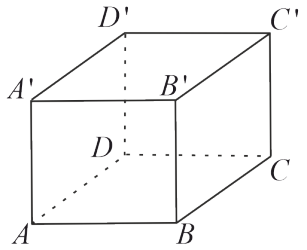
a) 100 cm^2; c) 60 cm^2;
b) 90 cm^2; d) 72 cm^2.

5. În cercul de centru O se consideră un diametru AB și o coardă CD, care intersectează diamentrul în punctul M. Dacă măsura arcului mic $\overset{\frown}{AC} = 100°$ și $m(\widehat{CMB}) = 60°$, atunci măsura arcului mic $\overset{\frown}{AD}$ este:



a) 100° ; b) 60°; c) 80°; d) 40°.

6. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, măsura unghiului dintre dreptele AA' și BD' este egală cu 30°, iar $BD' = 20$ cm. Lungimea muchiei AA' este:



a) 10 cm; c) $10\sqrt{2}$ cm;
b) $10\sqrt{3}$ cm; d) 5 cm.

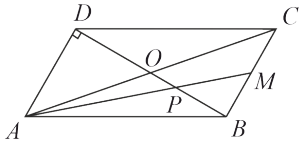
SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Dacă se împarte un număr natural nenul n la 24, 36, 48, se obțin resturile 20, 32, respectiv 44.
   a) Este posibil ca numărul să fie 212? Justificați răspunsul.
   b) Aflați numărul n știind că $200 < n < 600$.
2. Se consideră expresia $E(x) = (x^2 + 3x + 2)^2 + 2(x^2 + 3x + 3) - 1$.
   a) Calculați $E(-1)$.
   b) Arătați că $E(n)$ este pătratul unui număr natural impar, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

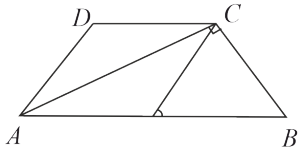
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\sqrt{3}$.
   a) Determinați numărul real a, știind că $f(a)=3\sqrt{3}$.
   b) Dacă graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul A, determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul $B(2,3\sqrt{3})$.

4. Fie paralelogramul $ABCD$, cu $AC\bigcap BD=\{O\}$, $BD\perp AD$, $AB=26$ cm, $BD=24$ cm și M mijlocul laturii BC.



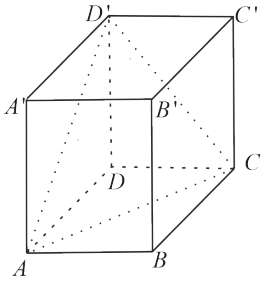
   a) Arătați că perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 72 cm.
   b) Calculați distanța de la P la AB, unde $\{P\}=AM\bigcap BD$.

5. Fie trapezul oarecare $ABCD$, $AB>CD$, $CD=12$ cm și $AC\perp BC$. În triunghiul ABC se consideră mediana $CM=10$ cm, care face cu latura AB un unghi de 60°.



   a) Arătați că triunghiul CMB este echilateral.
   b) Calculați lungimea segmentului PQ, știind că P și Q sunt proiecțiile punctelor M și D pe diagonala AC.

6. Fie prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=6$ cm și $AA'=8$ cm.
   a) Calculați aria triunghiului $AD'C$.
   b) Aflați distanța de la D la $(AD'C)$.



Testul 2

Elena Țițescu [2]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $2025-2025:2025$ este:
   a) 2025; b) 1; c) 2024; d) 0.
2. Cel mai mic element al mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-2025<x\leq 10\}$ este:
   a) -2025; b) -2024; c) 10; d) 0.
3. Dacă $\dfrac{a}{4}=\dfrac{b}{6}$, atunci $12a-6b$ este:
   a) 6; b) 3; c) 0; d) 1.
4. Se consideră $a=3-\sqrt{2}$ și $b=3+\sqrt{2}$. Media aritmetică a numerelor a, b și 6 este:

[2]Profesor, Școala Gimnazială „Naum Râmniceanu”, Corbi, amalia_elena19@yahoo.com

a) 2; b) 3; c) $3\sqrt{3}$; d) 4.

5. Un brad de Crăciun costă 200 lei. Afirmația: ,,După o scumpire cu 15% prețul bradului de Crăciun va fi 215 lei.” este:

   a) adevărată; b) falsă.

6. În tabelul de mai jos sunt temperaturile medii înregistrate pe parcursul unei săptămâni:

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura medie	$-2°$ C	$-3°$ C	$1°$ C	$-1°$ C	$2°$ C	$-3°$ C	$-1°$ C

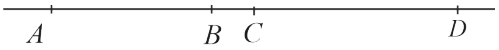
Temperatura medie în acea săptămână a fost de:

a) $-1°$ C; b) $1°$ C; c) $0°$ C; d) $-7°$ C.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

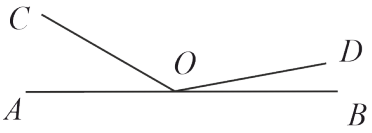
1. În figura alăturată punctele A, B, C, D



sunt coliniare, în această ordine, C este mijlocul lui AD și $AB = 3 \cdot BC$. Dacă lungimea segmentului AD este de 40 cm, atunci lungimea segmentului BC este egală cu:

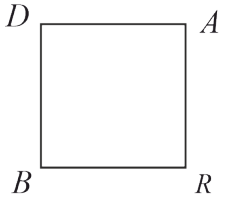
a) 1 cm; b) 20 cm; c) 3 cm; d) 5 cm.

2. În figura alăturată, punctele A, O, B sunt coliniare în această ordine, iar măsura unghiului COD este egală cu 140°. Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOD este egală cu:



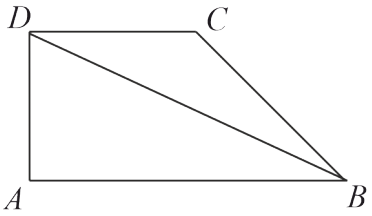
a) 100°; b) 130°; c) 140°; d) 160°.

3. Pătratul $BRAD$ are lungimea diagonalei AB egală cu 10 cm. Perimetrul pătratului $BRAD$ este egal cu:



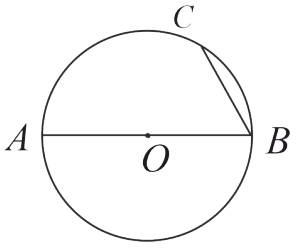
a) $20\sqrt{2}$ cm; c) $12\sqrt{2}$ cm;
b) 40 cm; d) $15\sqrt{2}$ cm.

4. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle D = 90°$. Diagonala BD este bisectoarea unghiului ABC, $AB = 8$ cm și $CD = 5$ cm. Lungimea laturii AD este egală cu:



a) 3 cm; b) 4 cm; c) $3\sqrt{2}$ cm; d) 5 cm.

5. În figura alăturată este reprezentat un cerc cu centrul în O şi raza egală cu 6 cm. Punctele A și B sunt diametral opuse, iar coarda BC are lungimea de 6 cm. Lungimea coardei AC este egală cu:



a) 6 cm; c) $6\sqrt{3}$ cm;
b) $6\sqrt{2}$ cm; d) 12 cm.

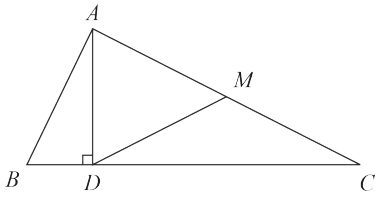
6. Aria bazei unui tetraedu regulat este egală cu $9\sqrt{3}$ cm^2. Suma lungimilor muchiilor laterale este egală cu:

   a) $16\sqrt{3}$ cm; b) 30 cm; c) 12 cm; d) 18 cm.

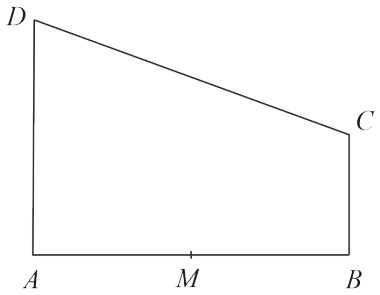
SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

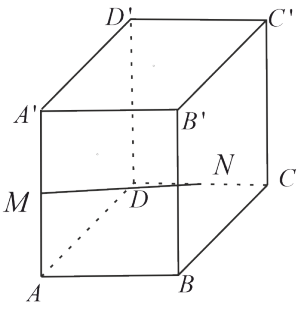
1. Pentru împodobirea bradului de Crăciun, Maria observă că dacă aranjează globulețele câte 8, câte 12 sau câte 18 îi rămân de fiecare dată 5 globulețe.
   a) Verifică dacă Maria poate avea în brad 53 de globulețe. Justifică răspunsul.
   b) Determină numărul globulețelor din bradul Mariei știind că acesta este cel mai mic număr natural de trei cifre cu proprietățile din enunț.
2. Se consideră numerele reale $a = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) : \sqrt{6}$ și $b = \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{4\cdot 6}$.
   a) Arătați că $a = 2$.
   b) Calculați $(8a-30b)^{100}$.
3. Se consideră expresia $E(x) = (5x+3)^2-(3x+4)^2$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Arată că $E(x) = (2x-1)(8x+7)$, pentru orice număr real x.
   b) Dacă numărul natural n nu este divizibil cu 3, atunci arată că $E(n)$ se divide cu 3.
4. În figura alaturată este reprezentat un triunghi ABC dreptunghic în A, cu $BC = 32$ cm și $BD = 8$ cm, $AD \perp BC$, $D \in BC$, M mijlocul laturii AC.



   a) Arătați că $AB = 16$ cm.
   b) Calculați aria patrulaterului $ABDM$.
5. În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AD \| BC$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$, $AD = 2\cdot BC = 6$ cm și $\mathcal{A}_{ABCD} = 27\sqrt{2}$ cm^2. Punctul M este mijlocul segmentului AB.



   a) Demonstrați că $CD = 9$ cm.
   b) Determinați măsura unghiului DMC.
6. În figura alăturată $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu aria laterală de 96 cm^2 și aria totală de 128 cm^2.



   a) Arată că $AA' = 6$ cm.
   b) Dacă punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AA' respectiv DC, determinați lungimea proiecției segmentului MN pe planul (BCC').

Testul 3

Luiza Anamaria Ștefan [3]

SUBIECTUL I

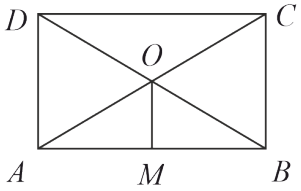
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dintre următoarele secvențe, cea formată numai din numere prime este:
   a) $1, 2, 3, 5$; b) $2, 3, 4, 5$; c) $5, 7, 9, 11$; d) $11, 13, 17, 19$.
2. Fracția supraunitară din mulțimea $\left\{\frac{7}{2}, \frac{3}{3}, \frac{11}{15}, \frac{6}{7}\right\}$ este:
   a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{3}{3}$; c) $\frac{11}{15}$; d) $\frac{6}{7}$.
3. Scriind sub formă de interval mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} | x > -3 \text{ și } x < 3\}$, obținem:
   a) $A = (-3, 3]$; b) $A = [-3, 3]$; c) $A = (-3, 3)$; d) $A = [-3, 3)$.
4. Media geometrică a numerelor $\sqrt{24}$ și $3\sqrt{6}$ este egală cu:
   a) 3; b) 4; c) $\sqrt{6}$; d) 6.
5. Un telefon costă 120 lei. Prețul acestuia se mărește cu 10 lei. Noul preț este:
   a) 132 lei; b) 130 lei; c) 1200 lei; d) 12 lei.
6. Maria afirmă: „Fracția $\frac{105}{119}$ este ireductibilă”. Afirmația Mariei este:
   a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În figura alăturată este desenat un dreptunghi $ABCD$. Punctul O este intersecția diagonalelor, iar punctul M este mijlocul laturii AB. Simetricul punctului A față de dreapta OM este punctul:



   a) M; b) B; c) C; d) D.
2. O ramă are forma unui romb $ABCD$, cu $\sphericalangle B = 120°$ și $BD = 70$ cm. Lungimea minimă a unei ghirlande care se aplică pe ramă este de:
   a) 1,4 m; b) 2 m; c) 2,8 m; d) 3 m.
3. Un cerc care are lungimea egală cu 4π cm are aria discului egală cu:
   a) 4π cm^2; b) $4\sqrt{2}$ cm^2; c) 6 cm^2; d) $6\sqrt{2}$ cm^2.
4. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu bazele $AB = 10$ cm și $CD = 2$ cm, iar $\sphericalangle BAD = 45°$. Lungimea segmentului AD este egală cu:
   a) 4 cm; b) $4\sqrt{2}$ cm; c) 6 cm; d) $6\sqrt{2}$ cm.
5. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat. Suma lungimilor muchiilor acestuia este de 36 cm. Suma ariilor fețelor tetraedrului este egală cu:

[3]Profesor, Școala Gimnazială „I.I.C. Brătianu”, Rătești, deneanuluiza@yahoo.ro

a) $144\sqrt{3}$ cm^2; b) 144 cm^2; c) 36 cm^2; d) $36\sqrt{3}$ cm^2.

6. Corina are două cutii de suc. Prima cutie are forma unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 6 cm și muchia laterală de 8 cm. A doua cutie are forma unui cub cu latura de 5 cm. Dintre cele două cutii, cea cu volumul mai mare este:

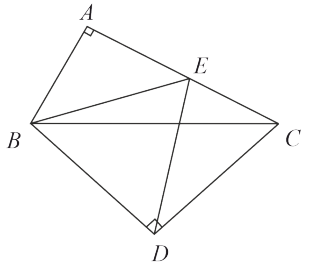
a) prima cutie; b) a doua cutie; c) au același volum.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

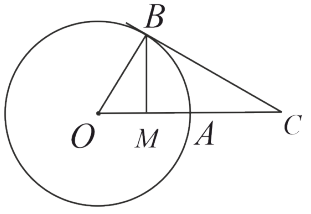
1. Se marchează o scrisoare cu 35 lei, folosind numai timbre de 4 lei și de 9 lei.
   a) Se pot folosi numai timbre de 4 lei?
   b) Câte timbre de 4 lei se folosesc?
2. Se consideră expresia $E(x) = (3x-2)^2 - (x-2)^2 + (x-1)(x+1) - 2x(4x-1)$, unde x este număr real.
   a) Calculează $E(2)$.
   b) Demonstrează că $E(x) \geq -10$, pentru orice număr real x.
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Calculează $f(0)$ și $f(-2)$.
   b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție dintre graficul funcției f și axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină aria triunghiului OAB.

4. În figura alaturată, $\triangle ABC$ este dreptunghic în A și $BC = 2 \cdot AB$, $\triangle BDC$ este dreptunghic isoscel în D, iar E este situat pe latura AC, astfel încât $AE = AB$.



   a) Arată că $\sphericalangle EBC = 15°$.
   b) Demonstrează că $\triangle BDE$ este echilateral.

5. În figura alăturată este reprezentat cercul $\mathcal{C}$ de centru O, unde punctul A este situat pe cerc, punctul M este mijlocul segmentului OA, iar punctul B este situat pe intersecția perpendicularei în M pe OA cu cercul $\mathcal{C}$. Tangenta în B la cerc intersectează dreapta OA în punctul C.



   a) Arată că triunghiul OAB este echilateral.
   b) Demonstrează că C este simetricul punctului O față de A.

6. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată având $VA = 2\sqrt{7}$ cm și raza cercului circumscris bazei egală cu 4 cm.
   a) Arată că lungimea apotemei piramidei este egală cu 4 cm.
   b) Dacă $P \in VO$ este astfel încât $VP = 2\sqrt{3} - 2$ cm, calculează măsura unghiului determinat de planele (VBC) și (PBC).

Testul 4

Florentina-Alina Ștefan [4]

SUBIECTUL I

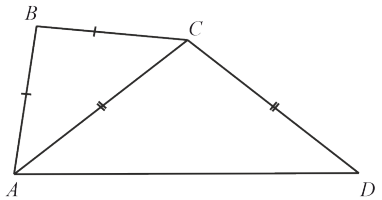
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Valoarea absolută a numărului $3\sqrt{50} - 7\sqrt{18}$ este:
   a) $-6\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{32}$; c) $6\sqrt{2}$; d) 1.
2. Probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $\{x \in \mathbb{N} : 24 \leq x \leq 50\}$ acesta să fie un multiplu de 4 este:
   a) $\frac{7}{27}$; b) $\frac{7}{26}$; c) $\frac{8}{26}$; d) $\frac{6}{27}$.
3. Dacă 20% dintr-un număr este cu 16 mai mic decât acesta, atunci suma divizorilor naturali ai numărului căutat este:
   a) 40; b) 42; c) 38; d) 44.
4. Valoarea expresiei $2a+3b-c$, pentru care numerele reale a, b, c satisfac următoarea relație $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b+2)^2} + \sqrt{(c+3)^2} \leq 0$ este egală cu:
   a) -1; b) 0; c) 1; d) -2.
5. Mulțimea valorilor reale ale numărului x, pentru care are loc inegalitatea $x(x+4) \leq x^2 + 2(x-5)$ este:
   a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $(-\infty, -5]$;
   b) $(-\infty, 5]$; d) $[-5, +\infty)$.
6. Într-o competiție cu 56 de participanți, raportul dintre numărul băieților și numărul fetelor este de $\frac{3}{4}$. Maria afirmă că numărul fetelor este egal cu 32. Afirmația ei este:
   a) adevărată; b) falsă.

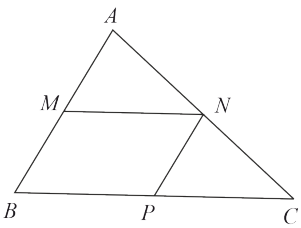
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie $ABCD$ patrulater convex cu $AB = BC$, $AC = CD$, $m(\widehat{BAC}) = 36°$ și $m(\widehat{CDA}) = 40°$. Atunci măsura unghiului $m(\widehat{BCD})$ este egală cu:
   a) 50°; c) 130°;
   b) 136°; d) 90°.



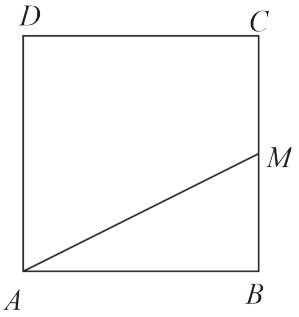
2. Fie triunghiul ABC cu $AB = 10$ cm, iar punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor AB, AC, BC. Dacă $MBPN$ este paralelogram cu perimetrul egal cu 22 cm, atunci lungimea laturii BC este:



[4]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, florentina.stefan86@upb.ro

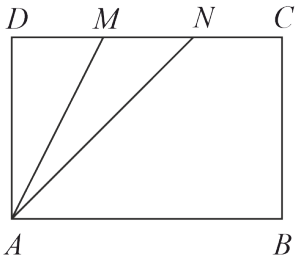
a) 10 cm; b) 12 cm; c) 6 cm; d) 5 cm.

3. Dacă M este mijlocul laturii BC a pătratului $ABCD$ și aria triunghiului AMB este egală cu 10 cm^2, atunci aria pătratului $ABCD$ este egală cu:



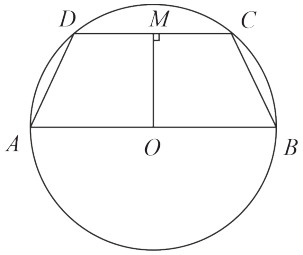
a) 30 cm^2; c) 40 cm^2;
b) 50 cm^2; d) 20 cm^2.

4. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AD = 4$ cm, $DC = 9$ cm. Punctele M, N sunt situate pe latura DC, astfel încât $\frac{DM}{MN} = \frac{MN}{NC} = 1$. Valoarea $\sin(\widehat{NAM})$ este egală cu:



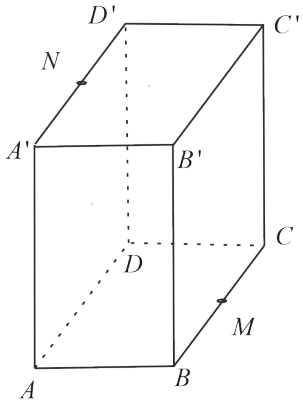
a) $\frac{6\sqrt{13}}{65}$; c) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$;
b) $\frac{3\sqrt{13}}{65}$; d) $\frac{6\sqrt{13}}{15}$.

5. Fie AB diametrul cercului de centru O și rază $R = 6$ cm. Pe unul dintre semicercuri considerăm punctele C și D astfel încât măsura arcului $m(\widehat{CD}) = 60°$, $CD \parallel AB$, $D \in \widehat{AC}$, $ABCD$ trapez isoscel și $OM \perp CD$, $M \in CD$. Aria trapezului $AOMD$ este egală cu:



a) $\frac{27\sqrt{3}}{3}$ cm^2; b) $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ cm^2; c) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2; d) $\frac{27\sqrt{2}}{3}$ cm^2.

6. Se consideră prisma patrulateră regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza $ABCD$ pătrat. Știind că suma tuturor laturilor este de 80 cm, muchia bazei este cu 2 mai mică decât înălțimea, M este mijlocul laturii BC și N este mijlocul lui $A'D'$, atunci distanța dintre punctele M și N este egală cu:



a) 10 cm; c) $10\sqrt{2}$ cm;
b) $10\sqrt{3}$ cm; d) 5 cm.

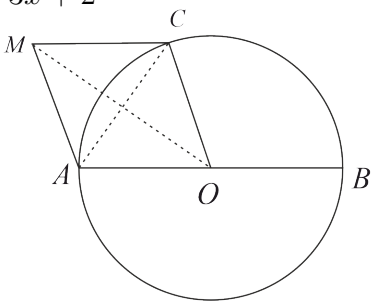
SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

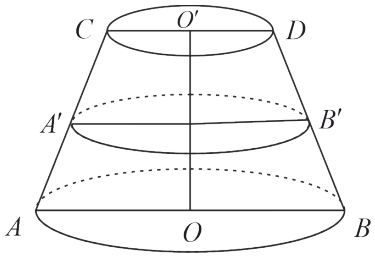
1. Un investitor își împarte o sumă de bani între trei afaceri: prima care aduce un profit de 5%, a doua care aduce un profit de 7% și a treia care aduce un profit de 10%. Suma total investită este de 100000 RON. Investitorul dorește ca profitul total să fie de 6000 lei, iar suma investită în afacerea cu profit de 7% să fie de 1,5 ori mai mare decât suma investită în afacerea cu 10% profit.

a) Aflați câți lei s-au investit în fiecare afacere.
b) Aflați profiturile pentru fiecare afacere.

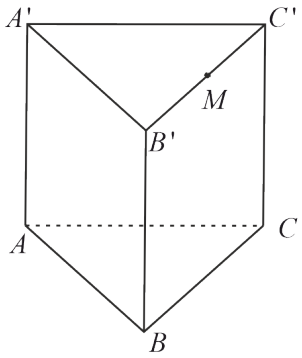
2. Se consideră expresia algebrică: $E(a,b)=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}+ab$, $a,b\in\mathbb{R}$.
   a) Calculați $E(-1,1)$.
   b) Arătați că $E(a,b)>\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}(a+b)^2$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Punctul $A(-2,-2)$ este situat pe graficul funcției, iar numere a și b sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3.
   a) Determinați numerele reale a și b.
   b) Determinați valorile întregi ale lui x, astfel încât $\dfrac{f(x)}{3x+2}\in\mathbb{Z}$.
4. Pe cercul de centru O și rază $R=12$ cm se iau punctele A și B diametral opuse și punctul C, astfel încât măsura arcului $\overset{\frown}{BC}$ sa fie egală cu 120°. În exteriorul triunghiului AOC se construiește triunghiul echilateral ACM.



   a) Calculați aria triunghiului BOC.
   b) Demonstrați că dreptele AC și MO sunt perpendiculare.
5. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor egale cu $R=$12 cm, respectiv $r=\frac{2}{3}$ din R și înălțimea egală cu 4 cm. Se secționează trunchiul cu un plan paralel cu bazele astfel încât aria secțiunii să fie egală cu 100 π cm^2.



   a) Determinați la ce distanță de baza mică s-a făcut secțiunea.
   b) Calculați tangenta unghiului format de generatoarea trunchiului de con cu planul bazei mari.
6. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu baza ABC triunghi echilateral. Volumul prismei este egal cu $54\sqrt{3}$ cm^3, iar muchiile AB și BB' sunt congruente. Dacă M este mijlocul laturii $B'C'$, calculați:



   a) Distanța de la M la muchia AB.
   b) Aria triunghiului $A'MB$.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Raluca Mihaela Georgescu [1]

SUBIECTUL I

1. Verificați dacă $2+i$ este soluție a ecuației $z^2-2^2z+2^3=0$.

2. Determinați valorile parametrului real m astfel încât graficele funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-5$ și $g(x)=x^2-4x+2m$ să aibă două puncte de intersecție.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\sqrt{x+1}+\log_2\sqrt{x-2}=1$.

4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte ce se pot forma cu ajutorul cifrelor din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$, acesta să fie par.

5. În reperul cartezian xOy se consideră triunghiul ABC, cu $A(3,6)$, $B(-1,4)$, $C(4,8)$. Determinați ecuația medianei din C.

6. Arătați că $3\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x+\cos 2x=2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ a & a & 1\end{pmatrix}$ și punctele distincte $A(a,1)$, $B(1,a)$, $C(a,a)$, $a\in\mathbb{R}$.
   a) Arătați că $\det(A(a))\leq 0, \forall a\in\mathbb{R}$.
   b) Verificați dacă există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele A, B și C să fie coliniare.
   c) Determinați valoarea parametrului real a astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 8.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.
   a) Arătați că $x*y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$.
   b) Rezolvați ecuația $x*x=1$.
   c) Calculați valoarea expresiei $\frac{1}{12}*\frac{2}{12}*\cdots*\frac{2023}{12}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2-1}-x^2+1$.
   a) Arătați că $f'(x)=2x(e^{x^2-1}-1)$.
   b) Găsiți intervalele de monotonie ale funcției.
   c) Demonstrați că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+3x^2-2x+1$.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, raluca.georgescu76@upb.ro

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln x)dx = 5$.

b) Arătați că $\int_2^4 \frac{f(x)-3x^2+2x}{x}dx = \frac{\ln 2(3\ln 2+2)}{2}$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă.

Testul 2

Ana Maria Carmen Iordache [2]

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre de forma $\overline{aa}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Să se determine coordonatele punctului de extrem al graficului funcției.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = 7$.
4. Un produs costă 200 lei. Să se determine cu ce procent trebuie ieftinit produsul pentru ca acesta să coste 160 lei.
5. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,3)$ și $C(2,1)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.
6. Calculați $\sin 15 \cos 15$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $B(a) = \begin{pmatrix} a+1 & a^2+1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} \sin 30 & \cos 30 \\ -\cos 30 & \sin 30 \end{pmatrix}$.

   a) Arătați că $\det(A) - 1 = 0$.

   b) Arătați că matricea $B(a)$ este inversabilă pentru orice valoare reală a lui a.

   c) Rezolvați ecuația $B(2) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 5^{x+y}$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$.

   a) Arătați că $2023 * (-2023) = 1$.

   b) Rezolvați ecuația $x^2 * x = 25$ în mulțimea numerelor reale.

   c) Să se demonstreze că dacă $(x * y) * z = 5^{z+1}$, atunci $x + y = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x-3} + 2023$.

   a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$.

   b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(f(x) - \frac{1}{x-3}\right)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \le 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

   a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{7}{6}$.

   b) Demonstrați că funcția admite primitive pe $\mathbb{R}$.

   c) Calculați $\int_1^e xf(x)\,dx$.

[2]Profesor, Liceul Tehnologic „Virgil Madgearu”, Roșiori de Vede, anamariayord@yahoo.com

Testul 3

Marius Macarie [3]

SUBIECTUL I

1. Determinați numărul complex z pentru care $z + 2 \cdot \bar{z} = 6 + 5i$.
2. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2 - ax + a + 3 = 0$ nu are soluții reale.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(x-2) = 2 + \log_2(x+1)$.
4. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinați numărul de submulțimi cu patru elemente ale lui A, care conțin exact trei numere pare.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 3)$ și $B(-2, 1)$. Determinați ecuația dreptei AC, știind că $AOBC$ este paralelogram.
6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg} 2x = \frac{120}{119}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 5b^2 = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
   a) Verificați că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$.
   b) Arătați că pentru orice două matrice $A, B \in G$ are loc egalitatea $A \cdot B = B \cdot A$.
   c) Demonstrați că inversa oricărei matrice din G aparține mulțimii G.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-2)X^2 - 6X + 2m + 3$.
   a) Pentru $m = 3$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.
   b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f este divizibil cu $X + 1$.
   c) Pentru $m = 1$, calculați $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2 + 8x + 5}}$.
   a) Arătați că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
   b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
   c) Determinați mulțimea valorilor funcției f.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x^2 + 10}$.
   a) Aflați primitiva G a funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 10}}$ astfel încât $G(0) = 1$.
   b) Calculați $\int_0^1 x \cdot e^{-x} \cdot f(x)dx$.
   c) Aflați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $h : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)$.

[3]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, vasile.macarie@upb.ro

Testul 4

Ioan Ropotă[4]

SUBIECTUL I

1. Arătați că numerele $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ sunt iraționale.

2. Să se găsească primul termen și rația unei progresii aritmetice dacă $a_2+a_4=16$ și $a_1\cdot a_5=28$.

3. Arătați că ecuația $2^x+3^x=5^x$ admite soluția unică $x=1$.

4. Rezolvați următoarea ecuație trigonometrică $\sin^2 x-4\sin x+3=0$.

5. Fie dreptele $d_1: y=m^2x+4$, $d_2: y=2x+7$. Determinați valorile parametrului real m pentru care d_1 și d_2 sunt paralele.

6. Arătați că triunghiul ABC este isoscel, unde $A(2,3)$, $B(-1,-1)$ și $C(6,0)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.

b) Calculați A^2.

c) Calculați A^{2024}.

2. Pe mulțimea $M=(-1,1)$ definim legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

a) Arătați că $1*2023=1$.

b) Arătați că legea este bine definită.

c) Determinați elementele simetrizabile relativ la legea considerată.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

b) Arătați că $x=0$ este punct de inflexiune.

c) Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x-\pi$ este asimptotă oblică la graficul funcției spre $+\infty$.

2. Pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$, se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=|\sin nx|$ și integrala $I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

a) Calculați $\int_0^{2\pi} f_3(x)dx$.

b) Arătați că $I_n\le\ln 2$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătați că $I_n\ge\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

[4]Profesor, Colegiul Tehnic „Costin D. Nenițescu”, București, ropotaioan@yahoo.com

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Raluca Mihaela Georgescu[1]

SUBIECTUL I

1. Arătați că numărul $(1-i)^{100}+|1+i|^{100}+2$ este natural.

2. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $2(x_1+x_2)-x_1x_2=1$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-4x+m=0$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2(x+1)-2\log_2(x+1)^2+\log_2 8=0$.

4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr n din mulțimea tuturor cifrelor, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2<6$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,a)$, $B(-1,5)$ și $C(a,2)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile parametrului real a, știind că aria triunghiului ABC este 8.

6. Determinați măsura unghiului B din triunghiul ascuțitunghic ABC, știind că $AC=5$, $BC=6$ și $\cos A=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} (m-2)x+y+3z &= 3 \\ 3x+(m-2)y+z &= 1 \\ x+3y+(m-2)z &= 4 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluție unică.

b) Rezolvați sistemul pentru $m=-2$.

c) Știind că sistemul are soluție unică, să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului să verifice relația $x_0+y_0-z_0=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x*y=2^{x+y}-4\cdot 2^x-2\cdot 2^y+12.$$

a) Calculați $1*2$.

b) Arătați că legea " $*$ " nu admite element neutru.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x*(-x)=4$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3\ln\sqrt{x^2+2}$.

a) Calculați $f'(x)$.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, raluca.georgescu76@upb.ro

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3\ln\sqrt{2}}{x}$.

c) Arătați că ecuația $f(x)=0$ are o singură rădăcină reală.

2. Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4-x\ln(x+1)$.

a) Arătați că $\int\limits_0^2 \dfrac{f(x)+x\ln(x+1)}{(x^2+4)^2}dx=\dfrac{\pi}{8}$.

b) Calculați $\int\limits_0^1 (x^2+4-f(x))dx$.

c) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

Testul 2

Mihai Ţene[2]

SUBIECTUL I

1. Calculați $|z|$, știind că $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$.

2. Aflați numărul întreg a, știind că $A(2a,a)\in G_f$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-3$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-3x)=\log_3(5x-7)$.

4. Aflați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $\{\sqrt{0},\sqrt{1},\sqrt{2},\ldots,\sqrt{199}\}$, acesta să fie rațional.

5. Aflați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,2)$ și este perpendiculară pe dreapta d: $x-y+3=0$.

6. Fie $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, astfel încât $\sin x=\frac{3}{5}$. Aflați $\operatorname{tg} x$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 2m-1 & 3 & 1\\ m & m-3 & 1\end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Aflați m, astfel încat matricea $A(m)$ să fie inversabilă.

b) Aflați rangul matricei $A(1)$.

c) Aflați inversa matrici $A(2)$.

2. Fie polinomul $f=X^3-4X^2+X+a$, $f\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

a) Pentru $a=6$, aflați câtul și restul împărțirii polinomului f la $(X-3)$.

b) Pentru $a=-4$, aflați x_1, x_2, x_3.

c) Aflați $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, în funcție de parametrul a.

[2]Profesor, Liceul Teoretic ,,Horia Hulubei", Măgurele, Ilfov, tene311@gmail.com

SUBIECTUL al III-lea

1. Se considera $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-3$.

a) Calculați ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0=2$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)+3}{f(x+1)+3}\right)^{x+5}$.

c) Arătați că ecuația $f'(x)=0$ are exact două rădăcini reale.

2. Fie functia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}$.

a) Calculați $\int_0^1(2x+3)e^x dx$.

b) Calculați $\int_3^4 f(x)\cdot\frac{1}{2x+3}dx$.

c) Aflați p, $q\in\mathbb{N}$, p și q prime între ele, știind că $\int_3^5 f(x)dx=\ln\frac{p}{q}$.

Testul 3

Antonio-Mihail Nuică[3]

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $1+6+11+\ldots+1001$.

2. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $ax^2-x-1=0$ sunt mai mari ca 1.

3. Să se determine termenul ce nu conține x din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{2024}$.

4. Se consideră dreapta de ecuație d: $3x-y+1=0$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că distanța de la $M(-1,a)$ la d este 1.

5. Să se calculeze $S=\cos 3^\circ+\cos 6^\circ+\cos 9^\circ+\ldots+\cos 174^\circ+\cos 177^\circ$.

6. Ce arie are un triunghi ABC cu $AB=4$, $A=\pi/6$, $B=\pi/3$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1\\ ax+a^2y+a^3z=1\\ bx+b^2y+b^3z=1\end{cases}$, a, $b\in\mathbb{R}$.

a) Să se rezolve sistemul pentru $a=2$, $b=-1$.

b) Să se determine perechile (a,b) pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Să se determine perechile (a,b) pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

2. Fie polinoamele $P_n(X)=X^{2n}+2nX+2n-1$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se descompună în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$ polinomul P_2.

b) Să se arate că -1 este rădăcină dublă a lui P_n, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

[3]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, antonio.nuica@upb.ro

c) Să se determine câtul împărțirii lui P_n la $X^2 - 2X + 1$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x^2}$.

a) Să se determine asimptotele lui G_f.

b) Să se determine punctele de extrem ale lui f.

c) Să se determine $\mathrm{Im} f$.

2. Se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine primitivele funcției f_1.

b) Să se determine primitivele funcției f_2^2.

c) Determinați o primitivă bijectivă $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$ a funcției f_4.

Testul 4

Mihaela Dimulescu[4]

SUBIECTUL I

1. Dacă $z^2 + z + 1 = 0$, unde z este un număr complex, să se arate că $z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}} = -1$.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\dfrac{x^2 + ax + 2}{x^2 + 1} \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Să se determine $a > 0$, știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

4. Se consideră două drepte de ecuații d_1: $x - 2y = 0$, d_2: $2x - 4y - 1 = 0$. Să se calculeze distanța dintre cele două drepte.

5. Să se calculeze produsul $P = \mathrm{tg}\, 1^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 2^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 3^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\, 89^\circ$.

6. Care este probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m - 1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

c) Peutru $m = 1$, determinați soluțiile reale (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care avem egalitatea $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14$.

2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$, se definește legea de compoziție

$$x \star y = \frac{xy}{1 + \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}}.$$

[4]Profesor, Liceul Economic ,,Maria Teiuleanu", Pitești, dimulescumihaela7@gmail.com

a) Calculați $1 \star \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $x \star (-x) \geq -x^2$, $\forall\, x \in M$.

c) Determinați perechile (a, b) de numere din M pentru care $a \star b = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\text{arctg}\, x - \ln(x^2 + 1)$.

a) Arătați că $f'(x) = \text{arctg}\, x - \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x)$. Determinați imaginea funcției g.

2. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^2+4}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)$, este o primitivă a funcției f_1.

b) Determinați o primitivă a funcției f_2 a cărei reprezentare grafică trece prin punctul $A(2, -\pi/2)$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f_4 este bijectivă.

Testul 5

Marius Macarie[5]

SUBIECTUL I

1. Calculați modulul numărului $z = (1+i)^3 + (1-i)^3$.

2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + 2x + 4 = 0$. Să se arate că $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{Z}$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $4^{\frac{x+2}{2}} + 2^{x+1} = 12$.

4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifra 7.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5), B(-1,4), C(2,-3)$. Scrieți ecuația înălțimii din vârful C în triunghiul ABC.

6. Paralelogramul $ABCD$ are $AB = 8$, $BC = 4$ și $m(\widehat{BAD}) = 60°$. Calculați produsul scalar $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & a & 2 \\ 3 & b & -4 \end{pmatrix}$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$ și sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1 \\ -x + ay + z = a + b \\ 3x + by - 4z = a \end{cases}.$$

[5]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, vasile.macarie@upb.ro

a) Arătați că $\det A(2,1) = -1$.

b) Aflați inversa matricei $A(2,1)$.

c) Determinați numerele reale a și b astfel încât sistemul de ecuații să fie compatibil simplu nedeterminat.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:

$$x * y = 2xy - 3x - 3y + 6.$$

a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

b) Determinați valorile reale ale lui x astfel încât $x * x * x = x$.

c) Aflați valorile reale ale lui a și b astfel încât funcția: $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}, *)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{(2x-1)e^{2x}}{(e^{2x} + x)^2}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați imaginea funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{e^{3x}}\, dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+1} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)I_n}{9} - \dfrac{2n+5}{9e^3}$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Testul 6

Ioan Ropotă[6]

SUBIECTUL I

1. Arătați că $(1+i)^3 - 2(i-1) = 0$, unde $i^2 = -1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{2}x^2 - ax + 2$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a, știind că $M(1,2)$ aparține graficului funcției f.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(x^2+7) = \log_7 x + \log_7(x+7)$.

4. Rezolvați următoarea ecuație trigonometrică $2(1 - \cos^2 x) - 5\sin x + 2 = 0$.

5. În planul înzestrat cu reperul ortonormat $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ se consideră punctele $A(-2,5)$, $B(-3,4)$, $C(-2,-1)$ și vectorul $\overrightarrow{u}(2,-1)$. Fie d dreapta definită de punctul A și vectorul director $\overrightarrow{u}$. Demonstrați că dreptele d și BC sunt secante.

[6]Profesor, Colegiul Tehnic „Costin D. Nenițescu”, București, ropotaioan@yahoo.com

6. Se consideră triunghiul ABC. Știind că $\sin A \cdot \sin B = \cos A \cdot \cos B$, arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în C.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 \\ 2 & A_2^2 & A_3^3 \end{pmatrix}$, unde P_1, P_2 sunt permutări, C_2^1, C_2^2 sunt combinări, iar A_2^2, A_3^3 sunt aranjamente.

a) Calculați $\det A$.

b) Rezolvați ecuația $A \cdot X = I_3$.

c) Calculați $(A^t - A)^{2023}$, unde A^t reprezintă transpusa matricei A.

2. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x * y = x + y - 7$.

a) Arătați că legea este bine definită.

b) Arătați că $e = 7$ este element neutru.

c) Arătați că $(\mathbb{Z}, *)$ este un monoid.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

a) Demonstrați că $x = -\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune.

b) Demonstrați că $x = 0$ este asimptotă verticală.

c) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală.

2. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

a) Fără a calcula efectiv integrala, să se arate că $1 < \int_0^1 e^{x^2}\, dx < e$.

b) Să se arate că $x = -\sqrt{2}$ este punct de maxim local pentru funcția $\int_0^x f(t)(t^2 - 2)\, dt$.

c) Să se verifice dacă $x = \sqrt{2}$ este punct de minim global pentru funcția

$$\int_0^x f(t)(t^2 - 2)\, dt.$$

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Mirela Mortici [1]

SUBIECTUL I

Fie expresia $E(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{1-x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$.

a) Determinați mulțimea numerelor reale x pentru care $E(x)$ are sens.
b) Demonstrați că $E(1-q^2) \in \mathbb{Q}$ oricare ar fi $q \in \mathbb{Q}, q \in [0,1]$.
c) Calculați $E(2\sqrt{3}-3)$.
d) Rezolvați ecuația $E(x) = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{b}{(x+2)(x+3)}$, oricare ar fi $x \in [0,\infty)$.
b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + ... + f(n))$.
c) Demonstrați că $\dfrac{1}{24} < \int\limits_0^1 f(x)dx < \dfrac{1}{6}$.
d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 (f(x))^n dx$.

SUBIECTUL al III-lea

Se consideră patrulaterul $ABCD$ și $M,\ N,\ P,\ Q,\ E,\ F$ mijloacele segmentelor $AB,\ BC,\ CD,\ DA,\ BD,\ AC$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
b) Demonstrați că $\overrightarrow{QE} = \overrightarrow{FN}$.
c) Dacă G este mijlocul segmentului EF, demonstrați că $\overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{0}$.
d) Arătați că $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.

[1]Profesor, Colegiul Național Pedagogic „Constantin Cantacuzino”, Târgoviște, mortici@colegiul-cantacuzino.ro

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu[2]

SUBIECTUL I

Fie polinomul $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) = X^4 - 4X^3 + mX^2 - 2X - 2$, cu $m \in \mathbb{R}$ și rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că $1 + \sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului.
b) Pentru $m = 5$, să se descompună polinomul în factori ireductibili.
c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 10$.
d) Să se arate că pentru orice $m \geq 0$ este adevărată inegalitatea

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_4^2} + \frac{x_1 + x_2 + x_4}{x_3^2} + \frac{x_1 + x_3 + x_4}{x_2^2} + \frac{x_2 + x_3 + x_4}{x_1^2} \geq 5.$$

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f(x)$.
b) Să se arate că ecuația $f''(x) = 0$ are cel puțin o singură soluție reală.
c) Să se arate că orice primitivă a funcției $f(x)$ este crescătoare pe $[-1, \infty)$.
d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{x}{x^2+3}\right) dx$.

SUBIECTUL al III-leq

În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(4,0)$ și $B(0,3)$ și pătratele $ABCD$ și $ABMN$.

a) Să se determine coordonatele punctelor C, D, M și N, știind că punctul C se află în primul cadran, iar punctul M se află în cadranul al treilea.
b) Să se calculeze $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}|$.
c) Să se determine perimetrul patrulaterului $CDNM$.
d) Să se determine aria patrulaterului $PQRS$, unde $\{P\} = AC \bigcap MD$, $\{Q\} = AM \bigcap CN$, $\{R\} = BN \bigcap MD$ și $\{S\} = BD \bigcap CN$.

[2]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, raluca.georgescu76@upb.ro

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră și Elemente de analiză matematică, Geometrie și Trigonometrie

SUBIECTUL I

Fie polinoamele $P(X) = X^9 + (X+1)^6$ și $Q(X) = X^2 + X + 1$, iar α și β rădăcinile polinomului Q.

a) Pentru fiecare $j = 0, 1, 2, ..., 9$ fie a_j coeficientul lui X^j din polinomul $P(X)$. Să se calculeze $S = \sum_{j=0}^{9} a_j$.
b) Să se calculeze $A = \alpha^2 + \beta^2$ și $B = \alpha^3 + \beta^3$.
c) Să se afle valorile $P(\alpha)$ și $P(\beta)$ și să se arate că polinomul $P(X) - 2$ se divide cu polinomul $Q(X)$.

SUBIECTUL al II-lea

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f.
b) Să se afle punctele de extrem ale funcției f și să se determine imaginea funcției f.
c) Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între graficul funcției f, axa Ox, dreapta $x = 2$ și dreapta $x = 3$.
d) Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0 > 1$ și $x_{n+1} = f(x_n),\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

SUBIECTUL al III-lea

În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(a, 1)$, $B(-1, b)$, $C(2, 3)$ și $D(3, 2)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculați lungimea segmentului $[CD]$ și determinați ecuația dreptei CD.
b) Determinați valorile parametrilor a și b pentru care punctele A, B, C, D sunt coliniare.
c) Determinați valorile parametrilor a și b pentru care sunt îndeplinite simultan condițiile $AB||CD$ și $AD||BC$.

SUBIECTUL al IV-lea

Rezolvați ecuația $\sqrt{3}\sin 2x = 2\cos^2 x,\ x \in \mathbb{R}$.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 2003)

[3]Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, revista.matinf@upit.ro

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Laura Erculescu [1]

1. Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{1+x+x^2+...+x^{n-1}}{1+x^2+x^4+...+x^{2n-2}}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Pentru $x=2$ valoarea expresiei $E(x)$ este egală cu:

   a) $\dfrac{1}{2}$; b) 2^n+1; c) $\dfrac{3}{2^n+1}$; d) $\dfrac{2^n+1}{4^n+1}$; e) $\dfrac{2}{2^n+1}$.

2. Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_m(x)=(m+1)x^2+2mx+m, m\in\mathbb{R}$. Dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, atunci vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m se află pe dreapta de ecuație:

   a) $y-x-1=0$; b) $2y+x=0$; c) $y-x=0$; d) $y+x=0$; e) $y-1=0$.

3. Se consideră ecuația $2\log_4(9^x+7)-2=3\log_8(3^x+1)$. Dacă $n\in\mathbb{N}$ este numărul soluțiilor nenule ale ecuației, atunci n este egal cu:

   a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|3x-x^3|$. Numărul punctelor de extrem al funcției f este egal cu:

   a) 0; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{A}, f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2+x+1}$. Funcția f este surjectivă dacă:

   a) $\mathbb{A}=\mathbb{R}$; b) $\mathbb{A}=(1,2)$; c) $\mathbb{A}=\left[\frac{9-2\sqrt{21}}{3},\frac{9+2\sqrt{21}}{3}\right]$; d) $\mathbb{A}=[-3,3]$; e) $\mathbb{A}=(1,3)$.

6. Dacă $a=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\dfrac{x}{3^n})^{3^n}$, $x\in\mathbb{R}$ atunci:

   a) $a=e$; b) $a=\dfrac{3}{x}$; c) $a=e^x$; d) $a=\dfrac{1}{e}$; e) $a=e^{-x}$.

7. Dacă $\int_0^1\sqrt{\dfrac{x}{1+x^3}}dx=\dfrac{2}{3}\ln t$, atunci:

   a) $t=2$; b) $t=1+\sqrt{2}$; c) $t=1+\sqrt{3}$; d) $t=3$; e) $t=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

8. Aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $f:\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$, axa Ox și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=\dfrac{3\pi}{4}$ este egală cu:

   a) $\dfrac{\pi}{4}$; b) tg $\dfrac{3\pi}{8}$; c) 2π; d) $\dfrac{\pi}{4}+$ tg $\dfrac{3\pi}{8}-2$; e) π.

9. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+y-2z=2\\2x+y+3z=1\\(2a-1)x+2y+z=b\end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

   Sistemul are o infinitate de soluții dacă:

   a) $\begin{cases}a=3\\b\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\end{cases}$; b) $\begin{cases}b=3\\a\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\end{cases}$; c) $\begin{cases}a=3\\b=3\end{cases}$; d) $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$; e) $\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}$.

[1]Profesor, Colegiul Național „Ienăchiță Văcărescu”, Târgoviște

10. Se consideră polinomul $f = X^4 - 8X^3 + mX^2 - nX + 16$ unde $m, n \in \mathbb{R}$. Polinomul f are toate rădăcinile reale și pozitive dacă:

a) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} m = 24 \\ n = 32 \end{cases}$; c) $\begin{cases} m = 24 \\ n = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} m = 32 \\ n = 24 \end{cases}$; e) $\begin{cases} m = 1 \\ n = 32 \end{cases}$.

Testul 2

Ioana Ileana [2]

1. Fie ecuația $\sqrt{5-x} + \sqrt[3]{x+4} = 3$. Suma soluțiilor ecuației este egală cu:

a) -37; b) -31; c) -27; d) 27; e) 36.

2. Valoarea sumei $S = \sum_{n=1}^{2025} [(n+2) \sum_{k=1}^{n} k!(k+1)^2]$ este egală cu:

a) $2027!+1$; b) $2029!-4110744$; c) $2028!-4110756$; d) $2027!+2029!$; e) $2028!+4110774$.

3. Fie $G = (4, +\infty)$. Valorile parametrilor reali m și n pentru care legea de compoziție $x * y = xy - 4x - 4y + m$ să determine pe G o structură de grup abelian, iar aplicația $f : \mathbb{R} \to G, f(x) = e^{2x} + n$ să fie morfism între grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$ sunt:

a) $\begin{cases} m = -20 \\ n = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} m = 20 \\ n = 4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} m = 4 \\ n = 20 \end{cases}$; d) $\begin{cases} m = -4 \\ n = 20 \end{cases}$; e) $\begin{cases} m = 4 \\ n = 4 \end{cases}$.

4. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a-4)^2 & (b-4)^2 & (c-4)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$ este egală cu:

a) $96(a-b)(b-c)(c-a)$; b) $-96(a-b)(b-c)(c-a)$; c) $48(a-b)(b-c)(c-a)$; d) $-48(a-b)(b-c)(c-a)$; e) 0.

5. Fie progresia geometrică $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenii strict pozitivi și rația egală cu 2025. Valoarea sumei $S = \frac{x_1 + 2x_2}{x_2 + 2x_3} - \frac{x_2 + 2x_3}{x_3 + 2x_4} + ... - \frac{x_{2024} + 2x_{2025}}{x_{2025} + 2x_{2026}}$ este egală cu:

a) 0; b) 2024; c) $\frac{2024}{2025}$; d) 2025; e) 1.

6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax - a + 2}{x^2 + 4}$ unde a este un parametru real. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x = 2$ este punct de extrem al funcției f este:

a) -3; b) -2; c) 0; d) 2; e) 3.

7. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 3x + 8}{x^2 - 2}$. Valoarea $\lim_{x \to \infty} (f(x))^{2x}$ este egală cu:

a) e^2; b) e^6; c) e; d) e^{-6}; e) ∞.

8. Fie $a \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ și $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2ax - a}$. Mulțimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția nu are puncte de discontinuitate este:

[2]Profesor, Colegiul Național Pedagogic „Constantin Cantacuzino”, Târgoviște, ileana@colegiul-cantacuzino.ro

a) $\emptyset$; b) $(-1,0)$; c) $(0,1)$; d) $(-1,1)$; e) $\mathbb{R}$.

9. Fie $m,n\in\mathbb{R}$ și funcția $F:(0,1)\to\mathbb{R}$, $F(x)=m\sqrt{(2-x^2)^n}$. Suma valorilor absolute ale lui m și n astfel încât F să fie o primitivă a funcției $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$ este egală cu:

a) 0; b) $\frac{8}{3}$; c) 1; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{10}{3}$.

10. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2-2x^2 & \text{dacă } x\in[1,\sqrt{2}]\\ 2x^2-6 & \text{dacă } x\in(\sqrt{2},2]\end{cases}$. Fie S aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f, dreptele de ecuații $x=1$, $x=2$ și axa Ox. Atunci:

a) $S\le\frac{1}{2}$; b) $S=\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}<S<1$; d) $S=1$; e) $S>1$.

Testul 3

Raluca Mihaela Georgescu [3]

1. Suma pătratelor soluțiilor reale pozitive ale ecuației $x^4+x^3-4x^2-2x+4=0$ este:

a) 9; b) 4; c) 3; d) 5; e) 11.

2. Soluțiile ecuației $\log_5|x-1|+\log_5|x+3|=1$ sunt:

a) $\{1,2\}$; b)$\{-4,2\}$; c) $\{2\}$; d) $\{1+i,1-i\}$; e) $\{-4,2,-1+i,-1-i\}$.

3. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1+2+...+n}{1^2+2^2+...+n^2}\right)^{2n-3}$ este:

a) e^2; b) ∞; c) 3; d) e^3; e) 0.

4. Suma soluțiilor întregi ale inecuației $x^4-x^3-x^2-5x-30\le 0$ este:

a) 3; b) 6; c) 2; d) 0; e) 5.

5. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+4x^2-1}{x^2-1}$. Dacă notăm cu n numărul asimptotelor verticale și cu m numărul asimptotelor orizontale ale funcției f, atunci $2n-3m$ este:

a) 2; b) 4; c) 1; d) -1; e) -2.

6. Modulul numărului complex $z=\dfrac{(1+i)^{100}+(1-i)^{100}}{(1+\sqrt{3}i)^{50}}$ este:

a) 6; b) 2; c) 8; d) 4; e) 12.

7. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=2$ este:

a) $\{3\}$; b) $[2,3]$; c) $(2,3]$; d) $(-\infty,3)$; e) $(-\infty,3]$.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x^2-15x+2$. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=a+1$, situat pe grafic, unde a este abscisa punctului de minim al funcției, este:

a) $21x+y-3=0$; b) $y-38=0$; c) $21x+y-38=0$; d) $21x-y-38=0$; e) $x+38=0$.

[3]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, Centrul Universitar Pitești, raluca.georgescu76@upb.ro

9. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \log_2 8 \\ -2 & \ln e^2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3^2-5} & \log_2 0,5 \\ 3 & \lg 10 \end{pmatrix}$. Atunci matricea $C = 8A^{-1}BA$ este:
a) $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & -25 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -10 & 25 \\ -9 & 19 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 9 & -19 \end{pmatrix}$.

10. Valoarea integralei $\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+2)}\,dx$ este:
a) $\frac{1}{2}\ln\frac{12}{5}$; b) $\frac{1}{6}\ln\frac{12}{5}$; c) $\frac{1}{3}\ln\frac{12}{7}$; d) $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$; e) $\frac{1}{6}\ln\frac{8}{5}$.

Testul 4

Marius Macarie [4]

1. Mulțimea soluțiilor inecuației $\log_{\frac{1}{4}}(\log_4(x^2-1)) \geq 0$ este:
a) $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; d) $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$;
b) $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right)$; e) $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$.
c) $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{2}\right)$;

2. Funcția $f : \mathbb{R} \to A$, $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+2}$ este surjectivă dacă:
a) $A = \left[\frac{21-4\sqrt{7}}{7}, +\infty\right)$; c) $A = \mathbb{R}$;
b) $A = \left[\frac{21-8\sqrt{7}}{7}, \frac{21+8\sqrt{7}}{7}\right]$; d) $A = \left(-\infty, \frac{21-8\sqrt{7}}{7}\right]$;
e) $A = [0, +\infty)$.

3. Dacă matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, atunci A^{60} este:
a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;.
b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4. Se consideră polinomul $f = 2X^5 + X^4 - 3X^3 - 3X^2 + X + 2 \in \mathbb{R}[X]$. Suma modulelor rădăcinilor polinomului f este:
a) 0; b) $\frac{1}{4}$; c) 4; d) 5; e) 10.

5. Se consideră funcția $f : (5, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+5) - \ln(x-5)$. Dacă $l = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot f(x)$ atunci:
a) $l = 10$; b) $l = 5$; c) $l = \infty$; d) $l = 0$; e) $l = 1$.

6. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+5x+6}dx$. Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot I_n$ atunci:

[4]Lect. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, vasile.macarie@upb.ro

a) $l = 0$; b) $l = 6$; c) $l = \frac{1}{6}$; d) $l = \frac{1}{12}$; e) $l = \infty$.

7. Se consideră funcția $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2) \cdot 5^x$. Aria suprafeței plane mărginită de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 3$ este:

a) $\dfrac{100 \ln 5 - 72}{\ln^2 5}$; c) $\dfrac{123 \ln 5 - 76}{\ln^2 5}$; e) $\dfrac{124 \ln 5 - 72}{\ln^2 5}$.

b) $\dfrac{125 \ln 5 - 100}{\ln^2 5}$; d) $\dfrac{100}{\ln^2 5}$;

8. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$ este:

a) $y = 1$; c) $y = x - 2$; e) $y = 0$.

b) $y = x$; d) $y = x + 1$;

9. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$. Mulțimea punctelor de extrem ale funcției f este:

a) $\{1, e^2\}$; b) $\{1, e\}$; c) $\{2, e\}$; d) $\{e^2\}$; e) $\{1\}$.

10. Numărul funcțiilor bijective $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 2, 4, 6, 8\}$ cu proprietatea $f(0) = 0$ este:

a) 120; b) 16; c) 10; d) 24; e) 6.

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Ion Alexandru Popescu [1]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare științe ale naturii

◦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
◦ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
◦ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră două variabile de tip `int` cu numele `x` și `y`. Ce valoare are expresia `x/y/x+30/x`, dacă `x` are valoarea 10 și `y` valoarea 20? **(4p.)**
   a) `6` b) `7` c) `3` d) `4`
2. Indicați valoarea expresiei `3*int(1+sqrt(101))`. **(4p.)**
   a) `330` b) `3` c) `11` d) `33`
3. Cu ce trebuie înlocuite punctele de suspensie ... pentru ca secvența de instrucțiuni să afișeze numărul de cifre ale lui `n`? **(4p.)**

```
Nr = 0;
do{
    k = n % 10;
    Nr++;
    n = ...;
}while(n);
cout<<Nr;
```

   a) `n % 10` c) `n * 10`
   b) `n / 10` d) `n - 1`
4. Fie `a` un tablou unidimensional de dimensiune 10 cu indicii de la 0, în care componentele au valorile 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ce se va afișa după execuția secvenței de instrucțiuni? **(4p.)**

```
x=0;
for(i=1;i<10;i++)
        if(i % 2 == 0)
                x += a[i];
cout<<x;
```

[1]Student, Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, alexionpopescu@gmail.com

a) 20 b) 21 c) 19 d) 22

5. Ce valoare trebuie să citim în x, pentru ca pe ecran să se afișeze 121? **(4p.)**

```
cin>>x; s = 0;
for(i=0;i<=x;i++)
        s+=2*i+1;
cout<<s;
```

a) 9 c) 10
b) 11 d) 12

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Algoritmul alăturat este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu a%b restul împărțirii numărului natural a la numărul natural nenul b și cu [c] partea întreagă a numărului real c.

```
citeste n (numar natural nenul)
m <- 0; i <- n
cat timp i > 0 executa
|  x <- i*i
|cat timp x > 9 executa
|| x <- [x/10]
||_
| m <- m + x; i <- i-1
|_
scrie m
```

   a) Scrieți ce se afișează dacă se citește valoarea 10. **(6p.)**
   b) Dacă se înlocuiește atribuirea x <- i*i cu x <- i, pentru n = 20 ce se va afișa? **(6p.)**
   c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
   d) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat prima structură repetitivă cu o structură de tip pentru ... execută. **(6p.)**

2. Se consideră secvența de instrucțiuni alăturată. Cu ce valori din [10,100] trebuie să pornească componentele lui x, pentru n = 10, ca să se afișeze 24689? **(6p.)**

```
for(i=1;i<=n;i++)
   if(int(sqrt(x[i]))==sqrt(x[i]))
        cout<<i;
```

3. Folosind doar variabila c de tip char scrieți o secvență de instrucțiuni care să afișeze toate literele mari ale alfabetului englez împreună cu codul ASCII: A65, B66, C67, ... **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citesc două numere naturale a, b din intervalul $[1, 10^5]$, $a < b$. Se cere să se scrie un program care calculează suma numerelor prime din $[a, b]$.

   Exemplu: dacă $a = 4$, $b = 10$, atunci programul afișează valoarea 12 ($5 + 7 = 12$). **(10p.)**
2. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural n ($n \in [1, 10^2]$), apoi un șir de n numere naturale nenule din intervalul $[1, 10^9]$, elemente ale unui tablou unidimensional. Programul va afișa pe ecran termenii șirului care sunt numere cuburi perfecte, în ordine crescătoare.

   Exemplu: pentru $n = 6$ și șirul cu termenii $125, 14, 27, 8, 100, 64$ se vor afișa pe ecran valorile:

   8 27 64 125 **(10p.)**
3. În fișierul bac.txt se află cel mult 10^6 numere naturale din intervalul $[1, 10000]$. Se cere să se determine numărul de triplete de numere consecutive crescător aflate pe poziții

consecutive în fișierul `bac.txt`. Se va scrie un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei și al timpului de execuție.

Exemplu: dacă fișierul `bac.txt` conține numerele `10 11 12 100 101 102 89` se va afișa: `2`. Sunt două triplete de numere consecutive crescător aflate pe poziții consecutive: `10 11 12` și `100 101 102`.

a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

Testul 2

Sanda Profeanu [2]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare științe ale naturii

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră două variabile de tip `int` cu numele `x` și `y`. Ce valoare are expresia `x*x/y + y*y/x`, dacă `x` are valoarea 13 și `y` valoarea 4? **(4p.)**
   a) `43.25` b) `43` c) `43.48` d) `40`

2. Indicați valoarea expresiei `3*pow(fabs(10)+fabs(-10),2)`. **(4p.)**
   a) `60` b) `48` c) `11` d) `1200`

3. Cu ce trebuie înlocuite punctele de suspensie ... pentru ca secvența de instrucțiuni să afișeze cel mai mare divizor comun pentru `a` și `b`? **(4p.)**

```
cin>>a>>b;
do{
    k = ...;
    a = b;
    b = k;
}while(k);
cout<<a;
```

   a) `a % b` c) `a + b`
   b) `a / b` d) `b*a`

4. Fie `a` un tablou unidimensional de dimensiune 10 cu indicii de la 0, în care componentele au valorile `a[i] = (i+1)*(i+1)`, `i = 0,..., 9`. Ce se va afișa după execuția secvenței de instrucțiuni? **(4p.)**

```
s=0;
for(i=1;i<10;i++)
        s += a[i]/10/%10;
cout<<s;
```

[2]Profesor, Liceul Tehnologic Metalurgic, Slatina, sandaprofeanu@gmail.com

a) 21 b) 25 c) 26 d) 24

5. Ce valoare trebuie să citim în `x`, pentru ca pe ecran să se afișeze 24? **(4p.)**

```
cin>>x; s = 0;
for(i=1;i<=10;i++){
        s+=x%10;
        x /= 10;
}
cout<<s;
```

a) 8881 c) 1230001
b) 22553331 d) 24

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Algoritmul alăturat este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii numărului natural `a` la numărul natural nenul `b` și cu `[c]` partea întreagă a numărului real `c`.

```
citeste n (numar natural nenul)
s <- 0; i <- 1
cat timp n > 0 executa
|  x <- i*i*i; n <-[n/10]
|cat timp x > 99 executa
|| x <- [x/10]
||_
| s <- s + x; i <- i + 1
|_
scrie s
```

   a) Scrieți ce se afișează dacă se citește valoarea 17777. **(6p.)**
   b) Dacă se înlocuiește atribuirea `x <- i*i*i` cu `x <- i*i*(n%10)`, pentru `n = 12345` ce se va afișa? **(6p.)**
   c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
   d) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat prima structură repetitivă cu o structură de tip `pentru ... executã`. **(6p.)**

2. Se consideră secvența de instrucțiuni alăturată. Cu ce valori distincte din `[10,100]` trebuie să pornească componentele lui `x`, pentru `n = 10`, ca să se afișeze 7? **(6p.)**

```
Nr = 0;
for(i=1;i<=n;i++)
   if(x[i]/10%10 == x[i]%10)
       Nr++;
 cout<<Nr;
```

3. Se consideră `c` o variabilă de tip `char`. Care este condiția logică pentru ca în `c` să fie memorată o literă mică și care nu este vocală? **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citesc două numere naturale a, b din intervalul $[1, 10^5]$, $a < b$. Câți termeni din șirul lui Fibonacci se află în intervalul $[a, b]$? Se cere să se scrie un program care calculează numărul cerut. Primii 6 termeni din șirul lui Fibonaccii sunt: 1, 1, 2, 3, 5, 8.

   Exemplu: dacă $a = 2$, $b = 10$, atunci programul afișează valoarea `4` (corespunzătoare termenilor 2, 3, 5, 8). **(10p.)**
2. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural n ($n \in [1, 10^2]$), apoi un șir de n numere naturale nenule din intervalul $[1, 10^9]$, elemente ale unui tablou unidimensional. Programul va afișa pe ecran termenii șirului care sunt numere cu toate cifrele egale.

   Exemplu: pentru $n = 6$ și șirul cu termenii `223, 44, 7, 8128, 100, 5555` se vor afișa pe ecran valorile:

`44 7 5555` **(10p.)**

3. În fișierul `bac.txt` se află cel mult 10^6 numere naturale din intervalul $[1, 10000]$. Se cere să se determine numărul de perechi de numere prime între ele, aflate pe poziții consecutive în fișierul `bac.txt`. Se va scrie un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei și al timpului de execuție.

   Exemplu: dacă fișierul `bac.txt` conține numerele `10 55 12 100 1000 77 8` se va afișa: `3`. Sunt trei perechi de numere prime între ele aflate pe poziții consecutive: `(55,12)`, `(1000,77)`, `(77,8)`.

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Doru Anastasiu Popescu [1]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
∘ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră trei variabile de tip int cu numele `a`, `b` și `c`. Ce valoare poate avea expresia `a/b-2/c+1` dacă valorile lui `a` și `b` sunt numere naturale consecutive nenule, iar `c` are o valoare număr natural nenul? **(4p.)**
   a) -3, -2, -1, 0, 1, 2 sau 3
   b) 0, 1 sau 2
   c) -1, 0, 1, 2 sau 3
   d) 0, 1, 2 sau 3

2. Se consideră funcția alăturată. Care este valoarea expresiei `ex(100)`? **(4p.)**

```
int ex(int x){
if(x != 0)
    return ex(x-1) + x%2;
return x;
}
```

   a) `49`
   b) `50`
   c) `51`
   d) `100`

3. Utilizând metoda backtracking se generează permutările mulțimii {c,u,p,i,t} în ordine lexicografică astfel încât să nu existe două vocale una după alta. Primele trei soluții sunt: ciptu, ciput, citpu. Care este a 7-a solutie generată? **(4p.)**
   a) `citpu` b) `citup` c) `cpiut` d) `cpitu`

4. Se consideră un arbore cu 8 noduri prin vectorul de tați t = (7,5,5,2,0,5,2,5). Câte frunze are arborele? **(4p.)**
   a) 4 b) 5 c) 2 d) 3

5. Se dă un graf neorientat cu 10 noduri și muchiile [1,6], [2,3], [7,8], [7,9]. Să se afle numărul minim de muchii ce pot fi adăugate pentru ca graful sa devină conex. **(4p.)**

[1]Conf. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, doru.popescu0301@upb.ro

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerințele următoare.

1. Algoritmul alăturat este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii numărului natural `a` la numărul natural nenul `b` și cu `[c]` partea întreagă a numărului real `c`.

```
citeste a,b (numere naturale nenule)
m <- 0; i <- a
 cat timp i <= b executa
| x <- i; p <- 0
| cat timp x > 0  executa
|| x <- [x/10]
|| p <- p + 1
||_
| m <- m + i*p; i <- i + 1
|_
scrie m
```

   a) Scrieți ce se afișează dacă se citesc, în această ordine, numerele `97, 101`. **(6p.)**
   b) Dacă primul număr citit este `98`, ce valoare trebuie citită pentru `b` astfel încât algoritmul să afiseze `1612`. **(6p.)**
   c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
   d) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat prima structură repetitivă cu o structură de tip `pentru...execută`. **(6p.)**

2. Se consideră variabilele `A` și `B` definite cu ajutorul structurii `punct` din dreapta.

```
struct punct{
 int x, y;} A, B;
```

   Dacă `d` este o variabilă de tip float, care este expresia ce poate fi utilizată pentru a avea în `d` distanța dintre punctele `A` și `B`? **(6p.)**

3. Se dă `n` număr natural cu exact 9 cifre. Scrieți secvența de instrucțiuni pentru construirea unui tablou bidimensional notat cu `a`, care să aibă prima linie cu elementele egale cu ultima cifră a lui `n`, a doua linie cu penultima cifră a lui `n` și așa mai departe. Se vor utiliza doar variabila `n, i` și `j, i` pentru indicele liniei, `j` pentru indicele coloanei tabloului. **(6p.)**

   Exemplu: pentru `n = 987654321` se va construi tabloul

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9 9 9 9
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerințele următoare.

1. Subprogramul `divizori` are trei parametri, `n`, `a` și `b`, prin care primește un număr natural

`n` din intervalul $[1, 10^5]$ și returnează prin `a` și `b` două valori, reprezentând suma divizorilor pari, respectiv impari ai lui `n`. **(10p.)**

Exemplu: dacă `n=12`, atunci subprogramul returnează valoarele `a = 2+4+6+12`, `b = 1+3`, adică `a = 24, b = 4`.

2. Un text are cel mult 250 de caractere, iar cuvintele sale sunt formate numai din litere mici ale alfabetului englez și sunt separate prin câte un spațiu. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un text de tipul precizat mai sus și afișează pe ecran numărul de cuvinte care încep și se termină cu o vocală. Dacă nu există astfel de cuvinte, se afișează pe ecran doar mesajul `nu exista`. **(10p.)**

   Exemplu: pentru textul `anul acesta nu a plouat iarna` se va afișa pe ecran: `3` (cuvintele `acesta, a, iarna` încep și se termină cu o vocală).

3. În fișierul `bac.txt` se află pe o linie separate prin câte un spațiu cel mult `1000000` de numere cu maxim 9 cifre fiecare. Se cere să se determine numărul de triplete de numere pitagorice care se găsesc pe poziții consecutive în fișier. Se va scrie un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei și al timpului de execuție.

   Exemplu: dacă fișierul `bac.txt` conține numerele `10 6 8 11 3 4 5 3` se va afișa: 3, tripletele de numere pitagorice sunt `(10,6,8), (3,4,5), (4,5,3)`.

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

Testul 2

Doru Constantin [2]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
∘ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră o variabilă de tip `int` cu numele `x`. Pentru ce valori ale lui `x` este adevărată expresia `!(!(x<4)||!(x>-4))`? **(4p.)**

[2]Conf. univ. dr., Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București, Centrul Universitar Pitești, doru.constantin0804@upb.ro

a) -3,-2,-1,0,1,2,3
b) -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4
c) 0,1,2,3
d) -3,-2,-1,0

2. Se consideră funcția alăturată. Care este valoarea expresiei ex(12335698)? **(4p.)**

a) 37
b) 20
c) 21
d) 4

```
int suma(int x){
if(x != 0)
 if(x%10%3 == 0)
    return suma(x/10) + x%10;
     else
    return suma(x/10);
return 0;
}
```

3. Utilizând metoda backtracking se generează permutările mulțimii {d,i,n,a,m,o} în ordine lexicografică astfel încât pe prima și ultima poziție se află o vocală. Câte astfel de permutări se vor genera? **(4p.)**
a) 720 b) 24 c) 4 d) 144

4. Se consideră un arbore cu 10 noduri prin vectorul de tați t = (6,5,8,9,8,9,9,0,5,3). Care este lungimea maximă a unui lanț în acest arbore? **(4p.)**
a) 6 b) 5 c) 7 d) 4

5. Se dă un graf neorientat cu 7 noduri și muchiile [1,7], [5,2], [1,3], [5,6], [6,2], [5,1], [5,4]. Se cere să se determine numărul minim de muchii ce pot fi adăugate pentru ca graful să devină eulerian. **(4p.)**
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerințele următoare.

1. Algoritmul alăturat este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu a%b restul împărțirii numărului natural a la numărul natural nenul b și cu [c] partea întreagă a numărului real c.

```
citeste a (numar natural nenul)
Nr <- 0; s <- 0
 pentru i =a, 2*a executa
| x <- i; p <- 1
|cat timp x > 0  executa
|| p <- p * (x % 10)
|| x <- [x/10]
||_
| s <- s + p;
|_
scrie s
```

a) Scrieți ce se afișează dacă se citește valoarea 7. **(6p.)**
b) Dacă în algoritm se înlocuiește atribuirea p <- p * (x % 10) cu p <- p + x % 10, pentru a = 7 ce se va afișa? **(6p.)**
c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat prima structură repetitivă cu o structură de tip pentru...execută. **(6p.)**

2. Se consideră variabila S ce memorează datele pentru un segment, definite cu ajutorul structurii punct și segment din dreapta.

```
struct punct{
 int x, y;} ;
struct segment{
punct A,B;}S;
```

Dacă `d` este o variabilă de tip float, care este expresia ce poate fi utilizată pentru a avea în `d` lungimea segmentului? **(6p.)**

3. Se consideră secvența de instrucțiuni din dreapta. Ce se va afișa pe ecran? **(6p.)**

```
char x[100] = "Admitere InfoCUPIT";
    int i;
    for(i=0;i<strlen(x);i++)
      if(!(x[i]>='A'&&x[i]<='Z')){
         strcpy(x+i,x+i+1);
         i--;
        }
    cout<<x;
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Subprogramul `NrPrim` are trei parametri, `n, a` și `b`, prin care primește două numere naturale $a < b$ si returnează în `n` suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr prim din $[a, b]$. Dacă în $[a, b]$ nu există numere prime, atunci se va returna `0`. **(10p.)**

   Exemplu: dacă `a=12, b=25` atunci subprogramul returnează valoarea `n=36` ($13+23 = 36$).
2. Se dă de la tastatură `n` număr natural din intervalul $[1, 100]$. Se cere să se construiască în memorie un tablou pătratic cu dimensiunea `n` în care:

   - elementele diagonalei principale și secundară sunt egale cu caracterul `*`;

   - elementele triunghiului de sus și jos delimitate de diagonale sunt egale cu caracterul `@`;

   - elementele triunghiului din stânga și din dreapta delimitate de diagonale sunt egale cu caracterul `%`.

   După construirea tabloului se va afișa pe ecran ca în exemplul următor. **(10p.)**

   Exemplu: pentru `n = 5` se va afișa:

   ```
   *@@@*
   %*@*%
   %%*%%
   %*@*%
   *@@@*
   ```
3. În fișierul `bac.txt` se află pe o linie separate prin câte un spațiu cel mult 1000000 de numere cu maxim 9 cifre fiecare. Se cere să se determine pentru fiecare cifră impară în câte numere din fișier se găsește. Se va scrie un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei și al timpului de execuție.

   Exemplu: dacă fișierul `bac.txt` conține numerele `109 11134 30133 41 5` se va afișa pe ecran: `1-4ori 3-2ori 5-1ori 7-0ori 9-1ori`.

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 8

Clasa a IX-a

M 185. *Arătați că pentru orice numere naturale x_1, x_2, x_3, supraunitare și distincte două câte două, avem*

$$6 < \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) \leq \frac{91}{8}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești; *Titu Zvonaru*. Comănești). Este clar că

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) > 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

Pentru $x_1 < x_2 < x_3$ avem $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$, $x_3 \geq 4$, deci

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{4} = \frac{91}{8}.$$

Pentru $x_1 < x_3 < x_2$ avem $x_1 \geq 2$, $x_3 \geq 3$, $x_2 \geq 4$, deci

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{4}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{10}{3} = \frac{45}{4} < \frac{91}{8}.$$

Pentru $x_2 < x_1 < x_3$ avem $x_2 \geq 2$, $x_1 \geq 3$, $x_3 \geq 4$, deci

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) \leq \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{4} = \frac{65}{6} < \frac{91}{8}.$$

Pentru $x_2 < x_3 < x_1$ avem $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$, $x_1 \geq 4$, deci

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) \leq \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{10}{3} = \frac{125}{12} < \frac{91}{8}.$$

Pentru $x_3 < x_1 < x_2$ avem $x_3 \geq 2$, $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 4$, deci

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) \leq \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{4}\right)\left(3+\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{7}{2} = \frac{21}{2} < \frac{91}{8}.$$

Pentru $x_3 < x_2 < x_1$ avem $x_3 \geq 2$, $x_2 \geq 3$, $x_1 \geq 4$, deci

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) \leq \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{7}{2} = \frac{245}{24} < \frac{91}{8}.$$

M 186. *Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că*

$$\frac{ab(a+2b)}{2b+c} + \frac{bc(b+2c)}{2c+a} + \frac{ca(c+2a)}{2a+b} \leq \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca}{3}.$$

Mihály Bencze, Brașov

Soluția 1. Aplicând *Inegalitatea lui Bergström* avem $\sum \frac{a}{2b+c} = \sum \frac{a^2}{2ab+ac} \geq \frac{(\sum a)^2}{3\sum ab}$, deci $3\sum \frac{a(ab+bc+ca)}{2b+c} \geq (\sum a)^2$, adică $3\sum a\left(a+b-\frac{b(a+2b)}{2b+c}\right) \geq (\sum a)^2$. Astfel avem $3\sum a^2 + 3\sum ab - 3\sum \frac{ab(a+2b)}{2b+c} \geq \sum a^2 + 2\sum ab$, deci $\sum \frac{ab(a+2b)}{2b+c} \leq \frac{2\sum a^2 + \sum ab}{3}$.

Soluția 2. (*Titu Zvonaru*, Comănești). Cel mult una dintre variabile poate fi egală cu zero. Prin eliminarea numitorilor, inegalitatea se scrie

$$2\sum a^4b + 4\sum ab^4 + 4\sum a^2b^3 \geq 7\sum a^3b^2 + 3\sum a^2b^2c \tag{1}$$

Inegalitatea (1) este ciclică; putem presupune că $a = \min\{a, b, c\}$. Trebuie să analizăm două cazuri:

Cazul 1. $a \leq b \leq c$. Fie $x, y \geq 0$ astfel încât $b = a+x,\ c = a+x+y$. Inegalitatea (1) devine

$$18a^3x^2 + 18a^3xy + 18a^3y^2 + 33a^2x^3 + 72a^2x^2y + 81a^2xy^2 + 21a^2y^3 + 18ax^4 + 66ax^3y + 96ax^2y^2 + 48axy^3 + 6ay^4 + 3x^5 + 16x^4y + 29x^3y^2 + 20x^2y^3 + 4xy^4 \geq 0,$$

deci este adevărată.

Cazul 2. $a \leq c \leq b$. Fie $x, y \geq 0$ astfel încât $b = a+x+y,\ c = a+x$. Inegalitatea (1) devine

$$18a^3x^2 + 18a^3xy + 18a^3y^2 + 33a^2x^3 + 27a^2x^2y + 36a^2xy^2 + 21a^2y^3 + 18ax^4 + 6ax^3y + 6ax^2y^2 + 18axy^3 + 6ay^4 + 3x^5 - x^4y - 5x^3y^2 + x^2y^3 + 2xy^4 \geq 0.$$

Deoarece $3x^5 - x^4y - 5x^3y^2 + x^2y^3 + 2xy^4 = x(x-y)^2(3x^2+5xy+2y^2) \geq 0$, inegalitatea este adevărată și în acest caz.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = 0$ sau $a = 0,\ x = y$, adică pentru tripletele (k, k, k) și $(0, 2t, t)$ și permutări circulare, unde $k,\ t$ sunt numere reale strict pozitive.

M 187. *Fie $n > 1$ un număr natural impar. Se consideră numerele reale $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ astfel încât $a_1b_1 = a_2b_2 = \ldots = a_nb_n$ și $a_1^n + b_1^n = a_2^n + b_2^n = \ldots = a_n^n + b_n^n$. Fie mulțimile*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists i = \overline{1,n} \text{ a.î. } a_i = x\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists i = \overline{1,n} \text{ a.î. } b_i = x\}.$$

Arătați că avem $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) \in \{1, 2\}$.

Rămâne concluzia adevărată dacă n este număr par?

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Fie $s = a_1^n + b_1^n$ și $p = a_1^n b_1^n$. Atunci, pentru orice $i = \overline{1,n}$, numerele a_i^n și b_i^n sunt soluțiile ecuației $t^2 - st + p = 0$, deci $(a_i^n, b_i^n) \in \{(a_1^n, b_1^n), (b_1^n, a_1^n)\}$, pentru orice $i = \overline{2,n}$ și astfel $(a_i, b_i) \in \{(a_1, b_1), (b_1, a_1)\}$, pentru orice $i = \overline{2,n}$.

Cazul 1. Dacă $a_1 = b_1$, atunci $a_i = b_i = a_1$ pentru orice $i = \overline{2,n}$, deci $A = B = \{a_1\}$.

Cazul 2. Dacă $a_1 \neq b_1$, atunci avem două subcazuri.

Subcazul 2.1. Dacă $a_i = a_1$ și $b_i = b_1$ pentru orice $i = \overline{2,n}$, atunci $A = \{a_1\}$ și $B = \{b_1\}$.

Subcazul 2.2. Dacă există $i = \overline{2,n}$ astfel încât $a_i = b_1$ și $b_i = a_1$, atunci $A = B = \{a_1, b_1\}$.

Concluzia nu rămâne adevărată dacă n este număr par. De exemplu, pentru $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = \ldots = (a_{n-1}, b_{n-1}) = (0, 1)$ și $(a_n, b_n) = (0, -1)$ avem $a_1 b_1 = a_2 b_2 = \ldots = a_n b_n = 0$ și $a_1^n + b_1^n = a_2^n + b_2^n = \ldots = a_n^n + b_n^n = 1$, dar $A = \{0\}$ și $B = \{-1, 1\}$, deci $\text{card}(A) \neq \text{card}(B)$.

M 188. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă R, R_1 și R_2 sunt lungimile razelor cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, ABD, respectiv ACD, iar r, r_1 și r_2 sunt lungimile razelor cercurilor înscrise în aceste triunghiuri, să se arate că*

$$\frac{R + R_1 + R_2}{r + r_1 + r_2} \geq 1 + \sqrt{2}.$$

Când are loc egalitatea?

Marin Chirciu, Pitești

Soluția 1. (*Miguel Amengual Covas*, Spania). Evident, avem $R = \dfrac{a}{2}$, $R_1 = \dfrac{c}{2}$, $R_2 = \dfrac{b}{2}$, $r = \dfrac{-a+b+c}{2}$, $r_1 = \dfrac{-c+BD+AD}{2}$, $r_2 = \dfrac{-b+AD+DC}{2}$, deci $R + R_1 + R_2 = \dfrac{a+b+c}{2} = p$ și $r + r_1 + r_2 = AD = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2pr}{a} = \dfrac{p(-a+b+c)}{a}$. Astfel, avem

$$\frac{r + r_1 + r_2}{R + R_1 + R_2} = \frac{-a+b+c}{a} = -1 + \frac{b+c}{a} = -1 + \frac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2}} \leq -1 + \sqrt{2},$$

inegalitatea fiind echivalentă cu $(b-c)^2 \geq 0$. Deci

$$\frac{R + R_1 + R_2}{r + r_1 + r_2} \geq \frac{1}{-1+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2},$$

iar egalitatea are loc dacă și numai dacă $b = c$, adică triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

Soluția 2. (*Titu Zvonaru*, Comănești). Triunghiurile ABC, ABD și ACD sunt asemenea. Deoarece $R = \dfrac{a}{2}$, $r = \dfrac{bc}{a+b+c}$, obținem

$$\frac{R + R_1 + R_2}{r + r_1 + r_2} = \frac{R\left(1 + \frac{R_1}{R} + \frac{R_2}{R}\right)}{r\left(1 + \frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r}\right)} = \frac{\frac{a}{2}\left(1 + \frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right)}{\frac{bc}{a+b+c}\left(1 + \frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right)} = \frac{a(a+b+c)}{2bc} = \frac{a^2}{2bc} + \frac{(b+c)\sqrt{b^2+c^2}}{2bc}$$
$$\geq \frac{b^2+c^2}{2bc} + \frac{(b+c)\sqrt{2bc}}{2bc} \geq \frac{2bc}{2bc} + \frac{2\sqrt{bc}\cdot\sqrt{2bc}}{2bc} = 1 + \sqrt{2}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $b = c$, adică dacă și numai dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

M 189. *Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$\sum \frac{l_a}{h_a} - \prod \frac{l_a}{h_a} \leq 2.$$

Daniel Jinga, Pitești

Soluția 1. Folosind notații și formule uzuale, avem

$$\frac{l_a}{h_a} = \frac{\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}}{\frac{2S}{a}} = \frac{abc\cos\frac{A}{2}}{S(b+c)} = \frac{4RS\cos\frac{A}{2}}{2RS(\sin B+\sin C)} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Astfel inegalitatea din enunț devine $\sum \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}} - \prod \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}} \leq 2$, care, folosind că

$$\frac{A-B}{2}, \frac{B-C}{2}, \frac{C-A}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

poate fi rescrisă sub forma

$$\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} + \cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 1 \leq 2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Într-adevăr, avem $\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1 \leq \cos^2\frac{B-C}{2}+\cos^2\frac{C-A}{2}+\cos^2\frac{A-B}{2}-1 = \frac{3+\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)-2}{2} = \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-B}{2}\cos\frac{B+C-2A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{C-B}{2}+\cos\frac{B+C-2A}{2}\right) = 2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Soluția 2. (*Titu Zvonaru*, Comănești). Folosind notații și formule uzuale, obținem

$$\frac{l_a}{h_a} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\cdot\frac{a}{2S} = \frac{4RS\cos\frac{A}{2}}{2RS(\sin B+\sin C)} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Notăm

$$x = \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}},\ y = \frac{1}{\cos\frac{C-A}{2}},\ z = \frac{1}{\cos\frac{A-B}{2}}.$$

Avem $x, y, z \geq 1$ și trebuie să demonstrăm că $x+y+z-xyz \leq 2$, inegalitate care se poate scrie $(x-1)(y-1)+(z-1)(xy-1) \geq 0$, deci este adevărată.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = 1$ sau $x = z = 1$ sau $y = z = 1$, adică $A = B = C$.

Clasa a X-a

M 190. *a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $0{,}8 < a < 1$, fixate. Demonstrați că o infinitate de numere de forma $\sqrt{n^2 + an + b}$, unde $n \in \mathbb{N}$, au cifra zecimilor egală cu 4.*

b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $1{,}2 < a < 1{,}5$, fixate. Demonstrați că o infinitate de numere de forma $\sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$, unde $n \in \mathbb{N}$, au cifra zecimilor egală cu 4.

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție (*Titu Zvonaru.* Comănești). a) Trebuie să găsim $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left(n + \frac{2}{5}\right)^2 \leq n^2 + an + b < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2,$$

adică $\dfrac{4n}{5} + \dfrac{4}{25} \leq an + b < n + \dfrac{1}{4}$. Această dublă inegalitate este adevărată pentru orice $n \geq n_0$, unde $n_0 = \max\left\{\left[\dfrac{4b-1}{4(1-a)}\right] + 1; \left[\dfrac{4-25b}{5(5a-4)}\right] + 1; 1\right\}$.

b) Trebuie să găsim $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left(n + \dfrac{2}{5}\right)^3 \leq n^3 + an^2 + bn + c < \left(n + \dfrac{1}{2}\right)^3$, adică

$$n^2\left(\frac{3}{2} - a\right) + n\left(\frac{3}{4} - b\right) + \frac{1}{8} - c > 0 \text{ și } n^2\left(a - \frac{6}{5}\right) + n\left(b - \frac{12}{25}\right) + c - \frac{8}{125} \geq 0.$$

Deoarece $\dfrac{6}{5} < a < \dfrac{3}{2}$, rezultă că parabolele asociate funcțiilor $x^2\left(\dfrac{3}{2} - a\right) + x\left(\dfrac{3}{4} - b\right) + \dfrac{1}{8} - c$ și $x^2\left(a - \dfrac{6}{5}\right) + x\left(b - \dfrac{12}{25}\right) + c - \dfrac{8}{125}$ admit minime, deci există o infinitate de numere naturale n pentru care sunt satisfăcute inegalitățile anterioare.

M 191. *Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația*

$$3 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 2^{4x} + 6^{2x+2} + 36 \cdot 3^{4x} = 49x^2 + 7|x|.$$

Daniel Jinga, Pitești

Soluție (*Titu Zvonaru.* Comănești). Notând $y = 3 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 3^{2x}$, ecuația se scrie, succesiv

$$y^2 + y = 49x^2 + 7|x|,\ (y - 7|x|)(y + 7|x|) + y - 7|x| = 0,\ (y - 7|x|)(y + 7|x| + 1) = 0.$$

Deoarece $y + 7|x| + 1 > 0$, rămâne de rezolvat ecuația $3 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 3^{2x} = 7|x|$.

Funcția $f(x) = 3 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 3^{2x}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Pentru $x \leq 0$, funcția $g(x) = 7|x|$ este strict descrescătoare, deci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult o rădăcină. Aceasta este $x = -\dfrac{1}{2}$.

Pentru $x > 0$, este ușor de arătat că avem $2^{2x} > x$, $3^{2x} > x$ (de exemplu, folosind derivate sau folosind *Inegalitatea lui Bernoulli* $3^{2x} > 2^{2x} > 2^x \geq 2^{[x]} \geq 1 + [x] > x$), deci $f(x) > g(x)$ și astfel ecuația $f(x) = g(x)$ nu are soluții.

M 192. *a) Rezolvați în* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *ecuația*

$$\left(3x^4+1\right)\left(3y^4+1\right)=12xy\left(x^2+y^2\right)-8.$$

b) Câte soluții are această ecuație în $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$*?*

Miguel Amengual Covas, Spania și *Doru Anastasiu Popescu*, România

Soluție (*Titu Zvonaru.* Comănești). a) Ecuația se rescrie ca

$$(x-y)^4+3(x^2y^2-1)^2=0.$$

Rezultă că $x=y$ și $x^2y^2=1$ și obținem soluțiile reale $(x,y)\in\{(1,1),(-1,-1)\}$.

b) În mulțimea $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ ecuația are o infinitate de soluții, deoarece pentru orice y real avem o ecuație algebrică de gradul 4 cu necunoscuta x care, conform *Teoremei fundamentale a algebrei*, are cel puțin o soluție complexă. O altă justificare se obține rescriind ecuația sub forma

$$\left[(x-y)^2-i\sqrt{3}(x^2y^2-1)\right]\left[(x-y)^2+i\sqrt{3}(x^2y^2-1)\right]=0,$$

rezultând două ecuații de gradul al doilea cu necunoscuta x, care au soluții complexe.

Remarcăm că două soluții complexe nereale mai „elegante" sunt (i,i) și $(-i,-i)$.

M 193. *Determinați valorile reale ale lui* k *pentru care inegalitatea*

$$(a+b+c-1)^2+k-1\geq\frac{k+3}{8}\cdot(a+b)(b+c)(c+a)$$

are loc pentru orice numere reale nenegative a*,* b *și* c *astfel încât*

$$ab+bc+ca+abc\leq 4.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Pentru $a=b=c=0$ obținem $k\geq 0$. Pentru $a=b=2$ și $c=0$ obținem $k\leq 2$. Inegalitatea are loc pentru $a=b=c=x$, pentru orice $x\in[0,1)$. Așadar, avem

$$(1-x)\left[(k+3)x^2-(6-k)x+k\right]\geq 0,\ \text{adică}\ (k+3)x^2-(6-k)x+k\geq 0,\ \forall\, x\in[0,1).$$

Dacă discriminantul pătraticei $(k+3)x^2-(6-k)x+k$ nu este pozitiv, atunci $k\leq -2\sqrt{7}-4$ sau $k\geq 2\sqrt{7}-4$ și cum k nu este negativ, atunci $k\in[2\sqrt{7}-4;2]$. Dacă prin absurd $0\leq k<2\sqrt{7}-4$, atunci rădăcinile pătraticei sunt diferite și nenegative, și cum $(k+3)x^2-(6-k)x+k\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1)$, deducem că ambele rădăcini sunt mai mari sau egale cu 1. Așadar, $\dfrac{k}{k+3}\geq 1$, contradicție. În concluzie, $2\sqrt{7}-4\leq k\leq 2$.

În continuare demonstrăm inegalitatea pentru $k\in[2\sqrt{7}-4;2]$.

Presupunem prima dată că $a+b+c<3$. Cum $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2<9$, atunci $ab+bc+ca<3$, și cum din *Inegalitatea mediilor* $abc\leq\dfrac{(a+b+c)^3}{27}<1$, atunci $ab+bc+ca+abc<4$. Așadar condiția din ipoteză este satisfăcută de orice $a,b,c\geq 0$ cu

$a+b+c<3$. Fie $a+b+c=3x$. Din *Inegalitatea mediilor* avem $8x^3=\dfrac{(a+b+b+c+c+a)^3}{27}\geq (a+b)(b+c)(c+a)$, deci $(k+3)x^3\geq \dfrac{k+3}{8}\cdot(a+b)(b+c)(c+a)$. Deci este suficient să arătăm că $(3x-1)^2+k-1\geq (k+3)x^3$, adică $(1-x)\left[(k+3)x^2-(6-k)x+k\right]\geq 0$, inegalitate evident adevărată (pătratica are determinantul nepozitiv).

Fie acum $a+b+c\geq 3$. Datorită simetriei, putem presupune că $a\geq b\geq c$. Notăm $a+b+c=p$ și $ab+bc+ca=q$, cu p și q fixate. Dacă $b=0$, atunci $c=0$, deci $q=0$ și problema este rezolvată. Fie $b>0$, deci $q>0$. Inegalitatea devine $8(p-1)^2+8k-8\geq (k+3)pq-(k+3)abc$. Membrul drept este maxim când abc este minim. Deci este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru abc minim. Am demonstrat detaliat în rezolvarea problemei **MGO 188** din RMGO 1/2022 că distingem următoarele două cazuri: fie există un unic $0<y\leq x$ astfel încât $2x+y=p$ și $x^2+2xy=q$, fie $c=0$. Conform *Teoremei de minim a produsului*, pentru $a+b+c$ și $ab+bc+ca$ fixate, abc este minim fie pentru $a=b\geq c>0$, fie pentru $c=0$.

Presupunem întâi că există un unic $0<y\leq x$ astfel incât $2x+y=p$ și $x^2+2xy=q$. Clar, $x\geq 1$ și $x^2y\leq abc$, deci $x^2+2xy+x^2y\leq 4$, deci $xy(x+2)\leq 4-x^2$, și cum $xy(x+2)>0$ deducem că $1\leq x<2$. Mai mult, $y\leq \dfrac{2-x}{x}$. Cum de mai sus $y\leq x$, deducem că $y\leq \min\left\{x,\dfrac{2-x}{x}\right\}=\dfrac{2-x}{x}$. Inegalitatea devine

$$f(y)=(4-(k+3)x)y^2-2\left((k+3)x^2-8x+4\right)y+16x^2-16x+4k-(k+3)x^3\geq 0,\qquad (1).$$

Cum $1\leq x<2$, atunci funcția $f(y)$ este clar strict descrescătoare pe domeniul ei de definiție. Deci pentru a finaliza demonstrația, este suficient să înlocuim $y=\dfrac{2-x}{x}$ în (1). Obținem

$$(x-1)^2\left[-(k+3)x^3+16x^2-4(k+3)x+16\right]\geq 0.$$

Pentru $k=2$, avem $-(k+3)x^3+16x^2-4(k+3)x+16=-5x^3+16x^2-20x+16=(2-x)(5x^2-6x+8)\geq 0$, evident adevărat. Arătăm acum că $-(k+3)x^3+16x^2-4(k+3)x+16\geq 0$ adică $-5(k+3)x^3+80x^2-20(k+3)x+80\geq 0$. Știm că $-5x^3+16x^2-20x+16\geq 0$, adică $-5(k+3)x^3+16(k+3)x^2-20(k+3)x+16(k+3)\geq 0$. Pentru a încheia în acest caz demonstrația, este suficient să arătăm că $-5(k+3)x^3+80x^2-20(k+3)x+80-[-5(k+3)x^3+16(k+3)x^2-20(k+3)x+16(k+3)]\geq 0$, adică $16(2-k)(x^2+1)\geq 0$, evident adevărat.

Analizăm acum cazul $c=0$. Notăm $ab=q\leq 4$ și $a+b=p=2s\geq 2\sqrt{q}$. Inegalitatea devine $16s^2-16s+4k\geq (k+3)sq$. Pentru s fixat, $g(q)=(k+3)sq$ este crescătoare pe domeniul ei. Deci g este maximă când q este maxim. Pentru $\dfrac{3}{2}\leq s\leq 2$, cum $q\leq s^2$, deducem că $q_{\max}=s^2$. Deci este suficient să arătăm că

$$-(k+3)s^3+16s^2-16s+4k\geq 0.$$

Pentru $k=2$, avem $-5s^3+16s^2-16s+8\geq 0$, adică $(2-s)(5s^2-6s+4)\geq 0$, adevărat. Arătăm că $-(k+3)s^3+16s^2-16s+4k\geq 0$, adică $-5(k+3)s^3+80s^2-80s+20k\geq 0$. Știm că $-5s^3+16s^2-16s+8\geq 0$, adică $-5(k+3)s^3+16(k+3)s^2-16(k+3)s+8(k+3)\geq 0$. Pentru a încheia în acest caz demonstrația, este suficient să arătăm că $-5(k+3)s^3+80s^2-80s+20k-[-5(k+3)s^3+16(k+3)s^2-16(k+3)s+8(k+3)]\geq 0$, adică $4(2-k)(2s-3)(2s+1)\geq 0$, evident adevărat. Dacă $s>2$, atunci $g(q)\leq g(4)=4(k+3)s$. Deci este suficient să arătăm

că $16s^2 - 16s + 4k \geq 4(k+3)s$, adică $4s^2 - 4s - (k+3)s + k \geq 0$. Pentru $k = 2$, avem $4s^2 - 4s - 5s + 2 \geq 0$, adică $(s-2)(4s-1) \geq 0$, evident adevărat. Este suficient să arătăm că $4s^2 - 4s - (k+3)s + k - (4s^2 - 4s - 5s + 2) \geq 0$, adică $(2-k)(s-1) \geq 0$, evident adevărat.

Demonstrația este astfel completă.

Să remarcăm că avem egalitate pentru $a = b = c = 1$. Pentru $k = 2\sqrt{7} - 4$ mai avem, în plus, egalitate pentru $a = b = c = \dfrac{6-k}{2(k+3)} = \dfrac{5-\sqrt{7}}{2\sqrt{7}-1} = \dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$. Pentru $k = 2$ mai avem, în plus, egalitate pentru $a = b = 2$, $c = 0$ și permutările.

M 194. *Fie ABC un triunghi. Demonstrați că pentru orice punct M situat pe cercul înscris triunghiului ABC aven*

$$10r^2 \leq \left(1 - \frac{r}{r_a}\right) MA^2 + \left(1 - \frac{r}{r_b}\right) MB^2 + \left(1 - \frac{r}{r_c}\right) MC^2 \leq 5Rr.$$

Când au loc egalitățile?

Marin Chirciu, Pitești

Soluție (*Titu Zvonaru*. Comănești). Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dacă P este un punct oarecare din planul triunghiului, se știe că

$$a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = (a+b+c)PI^2 + abc.$$

Această identitate se obține, de exemplu, prin calcule, folosind formula coordonatelor centrului cercului înscris triunghiului,

$$x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c},\ y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}.$$

Deoarece punctul M din problemă este situat pe cercul înscris, obținem

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{r}{r_a}\right) MA^2 + \left(1 - \frac{r}{r_b}\right) MB^2 + \left(1 - \frac{r}{r_c}\right) MC^2 \\
&= \left(1 - \frac{p-a}{p}\right) MA^2 + \left(1 - \frac{p-b}{p}\right) MB^2 + \left(1 - \frac{p-c}{p}\right) MC^2 \\
&= \frac{1}{p}\left(a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2\right) = \frac{2pr^2 + 4pRr}{p} = 2r^2 + 4Rr.
\end{aligned}$$

Inegalitățile dorite devin

$$10r \leq 2r + 4R \leq 5R,$$

echivalente fiecare cu *Inegalitatea lui Euler* $R \geq 2r$. Mai mult, egalitățile au loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Clasa a XI-a

M 195. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și permutarea $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ definită prin*

$$\sigma(i) = i + (-1)^{i-1},\ i = \overline{1,2n},$$

Câte soluții $x \in \mathcal{S}_{2n}$ are ecuația $x\sigma = \sigma x$?

Sorin Ulmeanu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Ecuația $x\sigma = \sigma x$ este echivalentă cu $x\sigma x^{-1} = \sigma$, adică cu

$$\begin{pmatrix} x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & \dots & x(2n-1) & x(2n) \\ x(2) & x(1) & x(4) & x(3) & \dots & x(2n) & x(2n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix},$$

adică $(x(2i-1), x(2i)) \in \{(2j-1, 2j), (2j, 2j-1) \mid j = \overline{1,n}\}$, pentru orice $i = \overline{1,n}$.

Astfel perechea $((x(1), x(2))$ poate fi aleasă în $2n$ moduri, perechea $((x(3), x(4))$ poate fi aleasă în $2(n-1)$ moduri (pentru fiecare alegere a perechii anterioare), ..., perechea $(x(2n-1), x(2n))$ poate fi aleasă în 2 moduri (pentru fiecare alegere a perechilor anterioare), deci ecuația dată are $2^n \cdot n!$ soluții.

M 196. *Dacă a, b și x sunt numere reale care verifică relațiile*

$$\begin{cases} a\cos x - b\sin x = \cos 2x \\ a\sin x + b\cos x = 2\sin 2x \end{cases}$$

iar z este numărul complex $z = \sqrt[3]{a+b} + i\sqrt[3]{a-b}$, determinați $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $z^n = 1 + i$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție (*Titu Zvonaru.* Comănești). Avem

$$\begin{aligned} a &= 2\sin 2x \sin x + \cos x \cos 2x = \cos x \left(4\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x\right) = \cos x + 2\sin^2 x \cos x, \\ b &= 2\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x = \sin x \left(4\cos^2 x + 1 - 2\cos^2 x\right) = \sin x + 2\cos^2 x \sin x, \\ a+b &= \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x(\sin x + \cos x) \\ &= (\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x\right) = (\sin x + \cos x)^3, \\ a-b &= \cos x - \sin x + 2\sin x \cos x(\sin x - \cos x) \\ &= (\cos x - \sin x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x\right) = (\cos x - \sin x)^3. \end{aligned}$$

Rezultă că $z = \sin x + \cos x + i(\cos x - \sin x) = \sin x + \sin(90^\circ - x) + i\left(\cos x - \cos(90^\circ - x)\right) = \sqrt{2}\cos(45^\circ - x) + i\sqrt{2}\sin(45^\circ - x)$, deci $z^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(n(45^\circ - x)\right) + i\sin\left(n(45^\circ - x)\right)\right)$.

Ecuația $z^n = 1 + i$ devine $2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(n(45^\circ - x)\right) + i\sin\left(n(45^\circ - x)\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right)$, deci $n = 1$ și $x = 2k\pi$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

M 197. *Fie $a > 0$ un număr real fixat și fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin*

$$x_1 = a \text{ și } \quad nx_{n+1} = (n+1)\left(ax_n + na^{n+1}\right),\ \forall\, n \geq 1.$$

Calculați limita $$L = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n^2]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \right)^{\frac{n^2}{x_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{x_k}}.$$

Florică Anastase, Lehliu-Gară

Soluție. Avem $x_1 = a > 0$, $x_2 = 2(a \cdot x_1 + a^2) = 4a^2$, $2x_3 = 3(a \cdot x_2 + 2a^3) = 18a^3$, deci $x_3 = 9a^3$. Dacă presupunem că $x_n = n^2a^n$, atunci $nx_{n+1} = (n+1)(a \cdot n^2a^n + na^{n+1}) = n(n+1)^2a^{n+1}$, deci $x_{n+1} = (n+1)^2a^{n+1}$. Astfel am demonstrat prin inducție că $x_n = n^2a^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2 \cdot a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \ldots \cdot a^n = (n!)^2 \cdot a^{\frac{n(n+1)}{2}}$, iar $\dfrac{n^2}{x_n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{x_k} = \dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} + \ldots + \dfrac{1}{a^n}$. Pentru $a = 1$ obținem $\dfrac{n^2}{x_n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{x_k} = n + 1$, iar pentru $a \neq 1$ că $\dfrac{n^2}{x_n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{x_k} = \dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\frac{1}{a^n} - 1}{\frac{1}{a} - 1} = \dfrac{1}{a^n} + \left(\dfrac{1}{a^n} - 1\right) \cdot \dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1}{a^n} \cdot \dfrac{2-a}{1-a} - \dfrac{1}{1-a}$.

Cazul 1. Pentru $a = 1$, avem $\ln L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2} \ln(n!)^2 = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n}$ și aplicând *Lema Stolz-Cesaro* rezultă că $\ln L = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{1} = +\infty$, deci $L = +\infty$.

Cazul 2. Pentru $a \neq 1$, avem $\ln L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{a^n} \cdot \frac{2-a}{1-a} - \frac{1}{1-a}}{n^2} \ln\left((n!)^2 \cdot a^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a^n} \cdot \dfrac{2-a}{1-a} - \dfrac{1}{1-a}\right) \left[2 \cdot \dfrac{\ln(n!)}{n^2} + \dfrac{n+1}{2n} \cdot \ln a\right]$.

Dar, aplicând *Lema Stolz-Cesaro*, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{2n+1} = 0$, prin urmare $\ln L = \dfrac{\ln a}{2} \left(-\dfrac{1}{1-a} + \dfrac{2-a}{1-a} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n}\right)$.

Subcazul 2.1. Pentru $a \in (0,1)$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = +\infty$, deci $\ln L = -\infty$ și astfel $L = 0$.

Subcazul 2.2. Pentru $a > 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$, deci $\ln L = \dfrac{\ln a}{2(a-1)}$ și astfel $L = a^{\frac{1}{2(a-1)}}$.

M 198. *Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + mx + 1$, unde $m > -\dfrac{9}{4}$.*

Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are exact o soluție reală.

Daniel Jinga, Pitești

Soluția 1. Ecuația se rescrie ca $x^2 + x + \dfrac{1}{x} + m = 0$, deoarece 0 nu este soluție. Fie $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{x} + m$. Avem $g'(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}$. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$h(x) = 2x^3 + x^2 - 1$. Avem $h'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x + 1)$, deci ecuația $h'(x) = 0$ are soluțiile $-\frac{1}{3}$ și 0, h este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, strict descrescătoare pe $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, $h\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{27}$, $h(0) = -1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, folosind *șirul lui Rolle* rezultă că ecuația $h(x) = 0$ are exact o soluție x_0. Mai mult, cum $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$ și $h\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{32} > 0$, deducem că $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Astfel $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ este negativă pe $(-\infty, x_0) \setminus \{0\}$, zero în x_0 și pozitivă pe $(x_0, +\infty)$, deci $g(x)$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, strict descrescătoare pe $(0, x_0]$ și strict crescătoare pe $[x_0, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, folosind *șirul lui Rolle* rezultă că pentru a demonstra că ecuația $g(x) = 0$ are exact o soluție este suficient să arătăm că $g(x_0) > 0$. Într-adevăr, utilizând că $h(x_0) = 0$ și că $\frac{1}{2} < x_0 < \frac{3}{4}$ avem

$$g(x_0) = \frac{x_0^3 + x_0^2 + 1}{x_0} + m = \frac{\frac{1-x_0^2}{2} + x_0^2 + 1}{x_0} + m = \frac{x_0}{2} + \frac{3}{2x_0} + m > \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + m = \frac{9}{4} + m > 0.$$

Soluția 2. (*Titu Zvonaru*, Comănești). Fie a, b, c rădăcinile ecuației $f(x) = 0$. Conform *relațiilor lui Viete*, $a + b + c = -1$, $ab + bc + ca = m$, $abc = -1$. Avem

$$\begin{aligned}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 &= (a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 - 4(ab+bc+ca)^3 - 4abc(a+b+c)^3 \\ &\quad + 18abc(a+b+c)(ab+bc+ca) - 27a^2b^2c^2 \\ &= m^2 - 4m^3 - 4 + 18m - 27.\end{aligned}$$

Presupunem că a, b, c sunt numere reale; atunci $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$, adică

$$4m^3 - m^2 - 18m + 31 \leq 0, \quad (1).$$

Ecuația $4m^3 - m^2 - 18m + 31 = 0$ are o singură rădăcină reală $m_0 \approx -2{,}6107$, iar pentru $m > m_0$ avem $4m^3 - m^2 - 18m + 31 > 0$. Contradicția cu relația (1) ne arată că pentru $m > m_0$ ecuația $f(x) = 0$ admite o singură rădăcină reală.

Deoarece $m_0 > -\frac{9}{4}$, rezultatul obținut întărește puțin enunțul.

M 199. *Determinați cea mai mare constantă $k \geq 1$ pentru care inegalitatea*

$$\frac{1}{(ka+b+c)^2} + \frac{1}{(kb+c+a)^2} + \frac{1}{(kc+a+b)^2} \leq \frac{3}{(k+2)^2}$$

are loc pentru orice numere reale nenegative a, b și c astfel încât $ab + bc + ca = 3$.

Vasile Cîrtoaje, Ploiești și *Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Inegalitatea dată se rescrie sub forma omogenă

$$\frac{1}{(ka+b+c)^2} + \frac{1}{(kb+c+a)^2} + \frac{1}{(kc+a+b)^2} \leq \frac{9}{(k+2)^2(ab+bc+ca)}.$$

Pentru $a = 0$ și $b = c = 1$, inegalitatea devine $\frac{1}{4} + \frac{2}{(k+1)^2} \leq \frac{9}{(k+2)^2}$, adică

$$k(k^3 + 6k^2 - 15k - 28) \leq 0,$$

deci $k \le k_0$, unde

$$k_0 = 6\cos\left(\frac{\pi - \arccos(1/3)}{3}\right) - 2 \approx 2,82374$$

este rădăcina pozitivă a ecuației $k^3 + 6k^2 - 15k - 28 = 0$.

Pentru a demonstra că valoarea k_0 este cea mai mare valoare a lui k, vom demonstra inegalitatea omogenă pentru $k \in [1, k_0]$. Inegalitatea fiind binecunoscută pentru $k = 1$, considerăm în continuare că avem $k \in (1, k_0]$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a + b + c = 1$ și $a \le b \le c$. Notând

$$m = k - 1 > 0,\ q = ab + bc + ca,\ r = abc,$$

putem rescrie succesiv inegalitatea sub formele

$$\frac{1}{(ma+1)^2} + \frac{1}{(mb+1)^2} + \frac{1}{(mc+1)^2} \le \frac{9}{(m+3)^2 q},$$

$$9(ma+1)^2(mb+1)^2(mc+1)^2 \ge (m+3)^2 q \sum (mb+1)^2(mc+1)^2,$$

$$9(m^3 r + m^2 q + m + 1)^2 \ge (m+3)^2 q \sum (m^2 bc - ma + m + 1)^2,$$

$$f(q, r) + g(q) \ge 0,$$

unde $f(q, r) = 9m^6 r^2 + 18m^3(m^2 q + m + 1)r + 2m^3(m+3)^2 q(m+3)r$.

Este cunoscut că pentru $a + b + c = 1$ și q fixat, produsul r are valoare minimă pentru $a = 0$ sau $b = c$. Deoarece $f(q, r)$ este crescătoare în raport cu r, este suficient să considerăm aceste cazuri.

Cazul 1. $a = 0$. Inegalitatea omogenă devine

$$\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(kb+c)^2} + \frac{1}{(b+kc)^2} \le \frac{9}{(k+2)^2 bc}.$$

Utilizând inegalitatea $\dfrac{1}{(b+c)^2} \le \dfrac{1}{4bc}$ și lema de mai jos, este suficient să demonstrăm că

$$\frac{1}{4bc} + \frac{2}{(k+1)^2 bc} \le \frac{9}{(k+2)^2 bc},$$

care este echivalentă cu $k(k^3 + 6k^2 - 15k - 28) \le 0$.

Cazul 2. $b = c$. Pentru $b = c = 1$, inegalitatea omogenă devine

$$\frac{9}{(k+2)^2(2a+1)} - \frac{1}{(ka+2)^2} - \frac{2}{(a+k+1)^2} \ge 0,$$

care este echivalentă cu

$$(a-1)^2(9k^2a^2 + 2\gamma a + k\beta) \ge 0,$$

unde

$$\beta = -k^3 - 6k^2 + 15k + 28 \ge 0,\ \gamma = -2k^4 + k^3 + 9k^2 + 14k - 4.$$

Deoarece $\beta \ge 0$, este suficient să demonstrăm că $\gamma \ge 0$. Avem

$$2\gamma = \beta + (k-1)\alpha,$$

unde $\alpha = -4k^3 - k^2 + 23k + 36$, deci

$$2\alpha = 3\beta - 5k^3 + 16k^2 + k - 12 = 3\beta + (k-1)(3-k)(5k+4) > 0$$

și astfel $\gamma > 0$.

Pentru $k \in [1, k_0]$, egalitatea are loc pentru $a = b = c = 1$. Pentru $k = k_0$, egalitatea are loc și pentru $a = 0$ și $b = c = \sqrt{3}$ (sau orice permutare ciclică).

Am utilizat următorul rezultat.

Lemă. Dacă b, c sunt numere reale pozitive și $1 \leq k \leq 3$, atunci

$$\frac{1}{(kb+c)^2} + \frac{1}{(b+kc)^2} \leq \frac{2}{(k+1)^2 bc}.$$

Demonstrație. Inegalitatea este echivalentă cu

$$(b-c)^2[2k^2(b^2+c^2) + \beta bc] \geq 0,$$

unde $\beta = -k^4 + 2k^3 + 2k^2 + 2k - 1 > k^2(-k^2 + 2k - 1)$.

Ea este adevărată, deoarece

$$2k^2(b^2+c^2) + \beta bc > 4k^2 bc + k^2(-k^2+2k-1)bc = k^2(3-k)(1+k)bc > 0.$$

Clasa a XII-a

M 200. *Fie G un grup abelian. Arătați că dacă există $a, b, c \in G$ astfel încât* ord $(a) = 4$, ord $(b) = 5$ *și* ord $(c) = 6$, *atunci există $x \in G$ astfel încât* ord $(x) = 60$.

Rămâne concluzia adevărată dacă se renunță la ipoteza că grupul G este abelian?

* * *

Soluție. Avem $a^4 = b^5 = c^6 = e$. Fie $x = abc^2$.

Cum $x^{60} = a^{60}b^{60}c^{120} = e$, rezultă că ord (x) divide 60.

Dar $x^{30} = a^{30}b^{30}c^{60} = a^2 \neq e$, $x^{20} = a^{20}b^{20}c^{40} = c^4 \neq e$ și $x^{12} = a^{12}b^{12}c^{24} = b^2 \neq e$, deci ord (x) nu divide 30, 20 sau 12. Rezultă că ord $(x) = 60$.

Concluzia nu rămâne adevărată dacă se renunță la ipoteza că grupul G este abelian. De exemplu, pentru $G = S_5$ (grupul permutărilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, 5\}$), folosind scrierea ca produs de cicli, pentru $a = (1\ 2\ 3\ 4)(5)$, $b = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ și $c = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ avem ord $(a) = 4$, ord $(b) = 5$, ord $(c) = 6$ și S_5 nu conține permutări având ordinul 60.

M 201. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, y_1, y_2$ variabile, $n \geq 1$. Definim următoarele polinoame:*

$$S_k = \sum_{i=1}^{2n} x_i^k,\ k = \overline{1,4},$$

$$P = S_4 - 2(y_1+y_2)S_3 + (y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2)S_2 - 2y_1y_2(y_1+y_2)S_1 + 2ny_1^2y_2^2.$$

a) Arătați că pentru orice $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ există $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, y_1, y_2) = 0.$$

b) Arătați că dacă numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{Z}$ satisfac $P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, y_1, y_2) = 0$ pentru anumiți $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$, atunci cel puțin n dintre aceste $2n$ numere sunt egale.

Mihai Prunescu, București

Soluție. Notăm $s = y_1 + y_2$ și $p = y_1y_2$. Pentru orice variabilă x, observăm că

$$\begin{aligned} x^4 - 2sx^3 + (s^2+2p)x^2 - 2spx + p^2 &= x^4 + s^2x^2 + p^2 - 2sx^3 - 2spx + 2px^2 \\ &= (x^2 - sx + p)^2 = (x-y_1)^2(x-y_2)^2. \end{aligned}$$

Așadar,

$$P = (x_1-y_1)^2(x_1-y_2)^2 + \ldots + (x_{2n}-y_1)^2(x_{2n}-y_2)^2.$$

În $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau în oricare alt inel ordonat, $P = 0$ dacă și numai dacă toți termenii sunt 0, adică $x_1, \ldots, x_{2n} \in \{y_1, y_2\}$, deoarece aceasta este o sumă de pătrate.

Pentru punctul a) este suficient să dăm variabilelor $x_1, \ldots, x_{2n}$ valori în mulțimea $\{y_1, y_2\}$.

Pentru punctul b) este suficient să observăm că dacă $2n$ variabile iau numai două valori, cel puțin jumătate dintre ele vor fi egale cu una dintre valori și, mai mult decât era de demonstrat, celelalte sunt egale cu cealaltă valoare.

M 202. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și derivabilă, cu $f(0) = 0$. Demonstrați că*

$$\int_1^2 (3-x)f'(\ln x)\,dx \geq 2f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție. Pentru orice $x \in [1,2]$ avem $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, deci $3 - x \geq \dfrac{2}{x}$. Înmulțind cu $f'(\ln x) \geq 0$ (f fiind crescătoare), rezultă că $(3-x)f'(\ln x) \geq \dfrac{2}{x} \cdot f'(\ln x)$, pentru orice $x \in [1,2]$. Deci

$$\int_1^2 (3-x)f'(\ln x)\,dx \geq \int_1^2 \frac{2}{x} \cdot f'(\ln x)\,dx = 2f(\ln x)\Big|_1^2 = 2f(\ln 2) - 2f(0) \geq 2f\left(\frac{1}{2}\right),$$

deoarece f este crescătoare și $f(0) = 0$.

M 203. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă astfel încât*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Arătați că există $c \in (0,1)$ *astfel încât* $\sqrt{c^2+1}\cdot f(c) = 1$.

Mihály Bencze, Brașov

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Observând că $\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, egalitatea din ipoteza problemei se rescrie ca $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx = 0$.

Aplicând *Teorema de medie*, deducem că există $c \in (0,1)$ astfel încât $f(c) - \dfrac{1}{\sqrt{c^2+1}} = 0$, adică $\sqrt{c^2+1}\cdot f(c) = 1$.

M 204. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *și fie* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \geq \dfrac{1}{4n-2}$ *numere reale astfel încât*

$$\sum_{1\leq i<j\leq 2n} x_i x_j \geq n(2n-1).$$

Demonstrați că

$$(2n-1)\left(8n^2-8n+1\right)\sum_{i=1}^{2n} x_i - n\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{x_i} \geq 2n(n-1)(4n-1)^2.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin și *Vasile Cîrtoaje*, Ploiești

Soluție. Dacă fixăm $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} x_i$ și $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq 2n} x_i x_j$, atunci expresia din membrul stâng al inegalității dorite este funcție crescătoare de variabilă $-\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{x_i}$. Conform *Teoremei variabilelor egale* (V. Cîrtoaje, *The equal variable method*, Journal of Inequlities in Pure and Applied Mathematics, vol. 8, iss. 1, art. 15, 2007; `https://www.emis.de/journals/JIPAM/images/059_06_JIPAM/059_06_www.pdf#page=5`) aplicată funcției $\theta \to -\dfrac{1}{\theta}$ pe intervalul $\left[\dfrac{1}{4n-2}, \infty\right)$, suma $-\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{x_i}$ este minimă în următoarele două cazuri: fie i) există și sunt unici x, y cu $x_1 = \cdots x_{2n-1} = x \geq y = x_{2n} \geq \dfrac{1}{4n-2}$, fie ii) $x_1, \ldots, x_{2n-1} \geq \dfrac{1}{4n-2}$ și $x_{2n} = \dfrac{1}{4n-2}$.

Vom considera întâi cazul i). Avem $y \geq \dfrac{n-(n-1)x^2}{x}$ și cum $x \geq y$, atunci $x \geq 1$, iar cum $y \geq \dfrac{1}{4n-2}$, atunci $\begin{cases} y \geq \dfrac{n-(n-1)x^2}{x}, \text{ dacă } 1 \leq x \leq \dfrac{2n}{2n-1}, \\ y \geq \dfrac{1}{4n-2}, \text{ dacă } x \geq \dfrac{2n}{2n-1}. \end{cases}$

Fie, prima dată, $1 \leq x \leq \dfrac{2n}{2n-1}$. Notăm $(2n-1)\left(8n^2-8n+1\right)=K$ și observăm că $(n-1)(4n-1)^2=K-n$. Obținem $K\sum\limits_{i=1}^{2n}x_i-n\sum\limits_{i=1}^{2n}\dfrac{1}{x_i}\geq K((2n-1)x+y)-n\left(\dfrac{2n-1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geq K\left((2n-1)x+\dfrac{n-(n-1)x^2}{x}\right)-n\left(\dfrac{2n-1}{x}+\dfrac{x}{n-(n-1)x^2}\right)$. Deci este suficient să arătăm

$$K\left((2n-1)x+\frac{n-(n-1)x^2}{x}\right)-n\left(\frac{2n-1}{x}+\frac{x}{n-(n-1)x^2}\right)\geq 2n(K-n), \quad (1),$$

adică $\dfrac{K\left(x^2+1\right)}{x}-\dfrac{n\left[2n-1-(2n-3)x^2\right]}{x\left[n-(n-1)x^2\right]}\geq 2(K-n)$, adică

$$(x-1)^2\left[Kn+n-2n^2-\left(2n^2-2n\right)x-K(n-1)x^2\right]\geq 0.$$

Deoarece, în urma unui calcul direct, avem $Kn+n-2n^2-\left(2n^2-2n\right)x-K(n-1)x^2=(n-1)[2n-(2n-1)x]\left[\left(8n^2-8n+1\right)x+8n^2-4n\right]$, rezultă că (1) este adevărată. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x\in\left\{1,\dfrac{2n}{2n-1}\right\}$.

Fie acum $x\geq\dfrac{2n}{2n-1}$. Obținem $K\sum\limits_{i=1}^{2n}x_i-n\sum\limits_{i=1}^{2n}\dfrac{1}{x_i}\geq K((2n-1)x+y)-n\left(\dfrac{2n-1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geq K\left((2n-1)x+\dfrac{1}{4n-2}\right)-n\left(\dfrac{2n-1}{x}+4n-2\right)\geq 2n(K-n)$.

Considerăm acum cazul ii). Notăm $(4n-2)x_i-1=a_i\geq 0$, pentru orice $1\leq i\leq 2n-1$. Atunci $(2n-1)\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i+\sum\limits_{1\leq i<j\leq 2n-1}a_ia_j\geq n(2n-1)(4n-1)(4n-3)$ și avem de arătat că

$$\left(8n^2-8n+1\right)\sum_{i=1}^{2n-1}a_i+4n(2n-1)\sum_{i=1}^{2n-1}\frac{a_i}{a_i+1}\geq 2n(2n-1)(4n-1)(4n-3).$$

Din relația $(n-1)\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i\right)^2\geq(2n-1)\sum\limits_{1\leq i<j\leq 2n-1}a_ia_j$, obținem

$$\begin{aligned}(n-1)\left(\sum_{i=1}^{2n-1}a_i\right)^2+(2n-1)^2\sum_{i=1}^{2n-1}a_i&\geq(2n-1)^2\sum_{i=1}^{2n-1}a_i+(2n-1)\sum_{1\leq i<j\leq 2n-1}a_ia_j\\&\geq n(2n-1)^2(4n-1)(4n-3),\end{aligned}$$

iar de aici că $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i\geq(2n-1)(4n-1)$.

Din *Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i\left(a_i+1\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{2n-1}\dfrac{a_i}{a_i+1}\geq\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i\right)^2$ și rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}\dfrac{a_i}{a_i+1}\geq\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i\right)^2-2\sum\limits_{1\leq i<j\leq 2n-1}a_ia_j+\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i}$. Deci este suficient să arătăm că

$$\left(8n^2-8n+1\right)\sum_{i=1}^{2n-1}a_i+\frac{4n(2n-1)\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i\right)^2-2\sum\limits_{1\leq i<j\leq 2n-1}a_ia_j+\sum\limits_{i=1}^{2n-1}a_i}\geq 2n(2n-1)(4n-1)(4n-3).$$

Cum $\sum\limits_{1\le i<j\le 2n-1} a_ia_j \ge n(2n-1)(4n-1)(4n-3) - (2n-1)\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i$, atunci

$$-2\sum_{1\le i<j\le 2n-1} a_ia_j \le 2(2n-1)\sum_{i=1}^{2n-1} a_i - 2n(2n-1)(4n-1)(4n-3), \text{ deci}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2n-1} a_i\right)^2 - 2\sum_{1\le i<j\le 2n-1} a_ia_j + \sum_{i=1}^{2n-1} a_i \le \left(\sum_{i=1}^{2n-1} a_i\right)^2 + (4n-1)\sum_{i=1}^{2n-1} a_i - 2n(2n-1)(4n-1)(4n-3),$$

de unde obținem inegalitatea $\dfrac{4n(2n-1)\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i\right)^2 - 2\sum\limits_{1\le i<j\le 2n-1} a_ia_j + \sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i} \ge$

$$\frac{4n(2n-1)\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i\right)^2 + (4n-1)\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i - 2n(2n-1)(4n-1)(4n-3)}.$$

Astfel este suficient să arătăm că

$$\left(8n^2-8n+1\right)\sum_{i=1}^{2n-1} a_i + \frac{4n(2n-1)\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i\right)^2 + (4n-1)\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i - 2n(2n-1)(4n-1)(4n-3)} \ge 2n(2n-1)(4n-1)(4n-3).$$

Notăm $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} a_i = (2n-1)(4n-1)s \ge (2n-1)(4n-1)$ și ultima inegalitate devine

$$\left(8n^2-8n+1\right)s + \frac{4n(2n-1)s^2}{(2n-1)(4n-1)s^2 + (4n-1)s - 2n(4n-3)} \ge 2n(4n-3), \quad (2).$$

Cum $s \ge 1$, pentru a demonstra (2) este suficient să arătăm că

$$(2n-1)(4n-1)\left(8n^2-8n+1\right)s^2 + 4n^2(4n-3)s \ge 4n^2(4n-3)^2.$$

Dar

$$(2n-1)(4n-1)\left(8n^2-8n+1\right)s^2 + 4n^2(4n-3)s \ge (2n-1)(4n-1)\left(8n^2-8n+1\right) + 4n^2(4n-3),$$

deci rămâne de arătat că $(2n-1)(4n-1)\left(8n^2-8n+1\right) + 4n^2(4n-3) \ge 4n^2(4n-3)^2$, adică $16n^2-14n+1 \ge 0$, evident adevărat.

Demonstrația este astfel completă.

Să remarcăm că avem egalitate pentru $(1,\ldots,1)$ sau pentru $\left(\dfrac{2n}{2n-1},\ldots,\dfrac{2n}{2n-1},\dfrac{1}{4n-2}\right)$ și permutările.

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

M 225. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc identitatea

$$[\ (2^n + 13996) / [\ [\ (2^n + 13996) / \ n\ ] / \ n\ ]\ ] = n^2,$$

unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

Mihai Prunescu, București

M 226. Demonstrați că numărul $k = 32$ este cea mai mare constantă pozitivă astfel încât inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{4k}{a+b+c+d} \geq 4 + k$$

are loc pentru orice $a = b \geq c \geq d \geq 0$ satisfăcând $ab + bc + cd + da = 4$.

Vasile Cîrtoaje, Ploiești

M 227. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n > 0$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k^2 + k^3)(b_k^2 + k^3)}{a_k b_k} = n^2(n+1)^2.$$

Mihály Bencze, Brașov

M 228. Fie $a, b > 0$. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{x^2 + ax + a^2} + \sqrt{x^2 + bx + b^2} \leq \sqrt{a^2 + ab + b^2}.$$

Miguel Amengual Covas, Spania

M 229. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$a_n = \sin\frac{\pi}{12n} \sin\frac{11\pi}{12n} \sin\frac{19\pi}{12n} \sin\frac{29\pi}{12n} - \frac{3 - \sqrt{n}}{2^n},\ \forall\, n \geq 1.$$

a) Arătați că șirul este mărginit.

b) Arătați că șirul are o infinitate de termeni pozitivi.

c) Arătați că șirul conține cel puțin doi termeni raționali.

Ionel Tudor, Călugăreni

Clasa a X-a

M 230. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$2\sqrt{(9x^2-7x+2)^3}+6\sqrt{9x^2-7x+2}+18x^2+3=2\sqrt{(3x^2-2x+1)^3}+6\sqrt{3x^2-2x+1}+15x.$$

George Mihai, Slatina

M 231. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \geq 2$. Demonstrați că

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{\sqrt{a_2}}+\frac{3}{\sqrt[3]{a_3}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} \geq \frac{S_n}{\sqrt[S_n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}},$$

unde $S_n = 1+2+\ldots+n$.

Când are loc egalitatea?

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 232. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$2^x+3^x+9^x+18^x=x^2.$$

Marin Chirciu, Pitești

M 233. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$x^3+x^2\lg 5+2x\lg 5+\lg^2 5-1=0.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

M 234. Fie ABC un triunghi, $T \in \text{Int}\,(ABC)$, $\{M\} = AT \cap BC$, $\{N\} = BT \cap AC$ și $\{P\} = CT \cap AB$. Demonstrați că

$$\left(\frac{TM}{TA}\right)^\lambda+\left(\frac{TN}{TB}\right)^\lambda+\left(\frac{TP}{TC}\right)^\lambda \geq \frac{3}{2^\lambda},$$

pentru orice $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Mihály Bencze, Brașov

Clasa a XI-a

M 235. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{tr} A \neq 0$ și $\det A = 0$. Considerăm ecuația matriceală

$$X^3 + AX(A+X) + X(A+X)A + (A+X)AX = O_2,\ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

a) Arătați că dacă X este soluție a ecuației, atunci $AX = XA$.

b) Demonstrați că ecuația are exact trei soluții.

Rămân valabile aceste afirmații în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Sorin Ulmeanu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 236. Demonstrați că există un unic șir mărginit $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+a_n} - \ln n,\ n \geq 1,$$

este șir constant. Arătați că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{6}.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

M 237. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 2$. Demonstrați că

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \geq 6.$$

Mihály Bencze, Brașov

M 238. Fie a, b, c și d numere reale pozitive astfel încât $a - 3 \geq b \geq c \geq d$.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$(a+9)^x + b^x + c^x + d^x = a^x + (b+3)^x + (c+3)^x + (d+3)^x.$$

Marin Chirciu și *Octavian Stroe*, Pitești

M 239. Fie a, b, c și d numere reale nenegative astfel încât

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4 \leq \left(2 + \sqrt{3}\right)(a + b + c + d - 4).$$

Arătați că

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} \leq 2.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Greci – Mehedinți

Clasa a XII-a

M 240. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu cel puțin două elemente, iar e elementul neutru al grupului.

Demonstrați că dacă pentru orice $a, b \in G \setminus \{e\}$ există un automorfism al lui G astfel încât $f(a) = b$, atunci există un număr prim p astfel încât ord $(x) = p$ pentru orice $x \in G \setminus \{e\}$.

Reciproca este adevărată?

* * *

M 241. Determinați rădăcinile polinomului

$$f = \sqrt[4]{27} \cdot X^4 - 4X^3 + \sqrt[4]{27} \in \mathbb{C}[X].$$

Ionel Tudor, Călugăreni

M 242. Fie a și b numere naturale nenule astfel încât $a < b \leq ea$. Arătați că

$$\left[\int_a^b \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 2}}{x}\, dx\right] = 2(b - a),$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Mihály Bencze, Brașov

M 243. Pentru orice număr natural $n \geq 2$ considerăm funcția $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{(1 - x)^{n-1}}{1 + x} \cdot \frac{(1 + n)(1 - x)^n + (1 - n)(1 + x)^n}{(1 - x)^{2n} + (1 + x)^{2n}}.$$

Este adevărată egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx\,?$$

Sorin Ulmeanu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 244. Pentru orice număr natural $n \geq 3$, fie k_n cea mai mare constantă reală pozitivă pentru care inegalitatea

$$u + v + w - k_n \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right) \geq 3 - 3k_n$$

are loc pentru orice numere reale $u, v, w \geq \dfrac{1}{n}$ satisfăcând $uv + vw + wu \geq 3$.

Demonstrați că există o infinitate de valori ale lui n pentru care numărul k_n este rațional.

Leonard Mihai Giugiuc, Greci – Mehedinți

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 136 (**simplu**). Se dau două numere naturale a și b, $a \leq b$. Se cere să se determine cel mai mic și cel mai mare număr din $[a, b]$ (notate cu Min și Max) cu produsul cifrelor nenule un număr *simplu*. Un număr x se numește *simplu*, dacă nu are divizori de forma p^2, unde p este număr prim.

Cerință

Cunoscând a și b, se cere să se afișeze Min și Max.

Restricții și precizări

- a, b numere naturale nenule cu maxim 9 cifre.

Exemplu

Date de intrare

$a = 4$, $b = 9$

Date de ieșire

5 7

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 137 (**litere**). Se dă un șir de caractere care se încheie cu *Enter*.

Cerință

Determinați cea mai lungă secvență de litere mici. Dacă există mai multe astfel de secvențe se va afișa prima dintre ele.

Restricții și precizări

- Șirul citit are maxim 100000 de caractere.
- O secvență de elemente din șir are indicii consecutivi.

Date de intrare

Fișierul `litere.in` conține pe prima linie șirul de caractere.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `litere.out` va conține secvența cerută.

Exemplu

litere.in	litere.out	**Explicație**
Ab67xyx89rtt*ui	xyx	Există două secvențe de litere mici de lungime maximă: xyx și rtt. Se va afișa prima dintre ele.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 138 (partitie). Se dau M și N numere naturale nenule, $M < N$. Se cere să se partiționeze mulțimea numerele din intervalul $[M, N]$ în submulțimi de numere cu același număr de divizori.

Cerință

Cunoscând M și N se cere să se determine submulțimile partiției descrisă mai sus, în ordinea crescătoare a numărului de divizori.

Restricții și precizări

- $0 < M < N < 100000$.

Date de intrare

Fișierul `partitie.in` conține pe prima linie valorile lui M și N separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `partitie.out` va conține pe câte o linie numerele submuțimilor din partiție separate prin câte un spațiu, în ordine crescătoare.

Exemplu

partitie.in	partitie.out	**Explicație**
10 17	11 13 17 10 14 15 16 12	Numerele din [10,15] împreună cu numărul de divizori: 10 -> 4 11 -> 2 12 -> 6 13 -> 2 14 -> 4 15 -> 4 16 -> 5 17 -> 2

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 139 (progresie). Se dă un șir de n numere naturale.

Cerință

Cunoscând șirul de numere, determinați datele celei mai lungi progresii aritmetice cu termeni alăturați (primul termen, rația și numărul de termeni). Dacă există mai multe astfel de progresii se va determina ultima dintre ele.

Restricții și precizări

- Numerele din șir sunt cu maxim 10 cifre.
- Numărul de n termeni din șirul dat este cel mult 100000.

Date de intrare

Fișierul `progresie.in` conține pe prima liniei n, iar pe linia a doua termenii șirului separați prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `progresie.out` va conține datele progresiei aritmetice (primul termen, rația și numărul de termeni separate prin câte un spațiu).

Exemplu

`progresie.in`	`progresie.out`	**Explicație**
8 2 4 6 7 9 13 17 10	9 4 3	Există două secvențe de lungime maximă cu termeni în progresie aritmetică: 2 4 6, 9 13 17.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 140 (scara). Se dă o scară cu n trepte. Gigel poate să urce o treaptă, două trepte deodată sau trei trepte deodată. În câte moduri poate urca scara?

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100$.

Date de intrare

Fișierul `scara.in` conține pe prima linie n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `scara.out` va conține numărul cerut în enunț.

Exemplu

`scara.in`	`scara.out`	**Explicație**
3	4	Poate urca scara cu 3 trepte astfel: câte o treaptă la fiecare pas; o treaptă la un pas și două trepte la un pas; două trepte la un pas și o treaptă la un pas; un pas cu 3 trepte.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

Clasa a X-a

I 141 (**palindrom**). Se dă o propoziție formată din litere mici si spații. Cuvintele sunt separate prin spații. Se cere să se determine cuvintele palindrom (citite de la stânga la dreapta sau invers conduc la același cuvânt). Apoi cuvintele se vor afișa pe câte o linie în ordine alfabetică.

Restricții și precizări

- Cuvintele au cel mult 30 de litere mici.
- Propoziția are cel mult 10000 de caractere și se termină cu *Enter*.

Date de intrare

Fișierul `palindrom.in` conține pe prima linie caracterele propoziției.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `palindrom.out` va conține cuvintele din enunț în ordine alfabetică, câte unul pe o linie.

Exemplu

`palindrom.in`	`palindrom.out`	**Explicație**
ana are un radar si ioi	ana ioi radar	Cuvintele palindrom din propozitie sunt: ana, radar, ioi. Alfabetic, acestea sunt în ordinea: ana, ioi, radar.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 142 (**sdlm**). Se dă un șir cu n numere naturale. Se cere să se determine lungimea unui subșir descrescător de lungime maximă, notată cu $Lmax$ și câte astfel de subșiruri sunt, notat cu $Nrmax$.

Cerință

Cunoscând un șir cu n numere naturale, determinați $Lmax$ și $Nrmax$ cu semnificația de mai sus.

Restricții și precizări

- $0 < n < 1000$.
- Numerele din șir au maxim 9 cifre.

Date de intrare

Fișierul `sdlm.in` conține pe prima linie n, iar pe linia următoare numerele șirului.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `sdlm.out` va conține pe câte o linie cele două numere din cerință: $Lmax$, $Nrmax$ separate printr-un spațiu.

Exemplu

sdlm.in	sdlm.out	**Explicație**
6 10 3 19 8 6 15	3 2	Există două subșiruri descrescătoare de lungime maximă 3: 10 8 6 19 8 6

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 143 (pp). Se dă un tablou pătratic de dimensiune n cu elemente numere naturale și k un număr natural nenul, $k \leq n$. Se cere să se determine numărul de subtablouri pătratice de dimensiune k, care au un număr maxim de numere pătrate perfecte.

Cerință

Cunoscând n, k și elementele tabloului pătratic determinați numărul de subtablouri pătratice de dimensiune k cu număr maxim de pătrate perfecte.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100$.
- Numerele din tablou sunt ≤ 1000000.

Date de intrare

Fișierul `pp.in` conține pe prima linie n și k, apoi pe liniile următoare elementele tabloului pătratic separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `pp.out` va conține pe prima linie numărul cerut.

Exemplu

pp.in	pp.out	**Explicații**
3 2 4 11 10 11 100 121 10 10 10	3	Subtablourile de dimensiune 2 care conțin un număr maxim de numere pătrate perfecte sunt: ——— 4 11 11 100 ——— 11 10 100 121 ——— 100 121 10 10 ———

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 144 (**anagrama**). Se dau n cuvinte $c_1, c_2, \ldots, c_n$ formate din litere mici. Un cuvânt este anagramă pentru alt cuvânt dacă el conține exact aceleași litere, eventual în altă ordine.

Cerință

Cunoscând n și cuvintele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se cere să se determine câte dintre aceste cuvinte sunt anagramă pentru primul: c_1.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$.
- Cuvintele conțin maxim 100 litere mici.

Date de intrare

Fișierul `anagrama.in` conține pe prima linie n și pe următoarele n linii câte un cuvânt.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `anagrama.out` va conține numărul din cerință.

Exemplu

`anagrama.in`	`anagrama.out`	**Explicație**
4 maria ana maari rimaa	3	Anagrame cu primul cuvânt sunt: maria, maari, rimaa

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Maria Crina Diaconu, Pitești

I 145 (**fixe**). Se consideră un cuvânt care se termină cu *Enter* format numai din litere mici. Folosind literele distincte din acest cuvânt, afișați a k-a permutare fără puncte fixe, in ordine alfabetică.

Cerință

Pentru un cuvânt dat, afișați permutarea cerută.

Restricții și precizări

- Cuvântul citit are cel mult 1000 de litere mici.
- O literă din permutare este punct fix dacă numărul de ordine al ei în alfabet este același cu numărul de ordine din permutare.

Date de intrare

Fișierul `fixe.in` conține pe prima linie k și pe linia a doua cuvântul.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `fixe.out` va conține literele celei de-a k-a permutări cu restricțiile din enunț. Dacă nu există o astfel de permutare, se va scrie în fișier caracterul #.

Exemplu

`fixe.in`	`fixe.out`	**Explicație**
3 mara	ram	Literele distincte din cuvânt sunt a, m, r. Permutările sunt amr, arm, mar, mra, ram, rma. Primele două permutări îl au pe a ca punct fix. A 3-a permutare fără puncte fixe este ram.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Clasele a XI-a și a XII-a

I 146 (**diagonala**). Se dă o matrice pătratică A de dimensiune n cu numere naturale. Determinați elementele diagonalei principale din matricea A^n.

Cerință

Cunoscând n și elementele matricei A, se cere să se determine elementele diagonalei principale din A^n.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 10$.
- Numerele din matrice sunt numere naturale ≤ 100.

Date de intrare

Fișierul `diagonala.in` conține pe prima linie n, apoi elementele matricei, linii după linii, pe fiecare linie numerele sunt separate prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `diagonala.out` va conține pe prima linie elementele diagonalei principale separate prin câte un spațiu.

Exemplu

`diagonala.in`	`diagonala.out`	**Explicație**
2 2 5 4 6	24 56	Matricea din fișier la puterea a doua este: 24 40 32 56

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 147 (**grhamilton**). Se dă un graf neorientat ponderat prin n numărul de noduri, m numărul de muchii și triplete de forma $i, j, cost$, unde *cost* este costul muchiei $[i, j]$. Se cere să se verifice dacă graful este hamiltonian și în caz afirmativ să se determine un ciclu hamiltonian de cost minim.

Restricții și precizări

- $3 \leq n \leq 20$.

Date de intrare

Fișierul `grhamilton.in` conține pe prima linie n și m separate prin spațiu și pe următoarele m linii triplete de forma i j *cost*, unde *cost* este costul muchiei $[i, j]$.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `grhamilton.out` va conține pe prima linie DA – dacă graful este hamiltonian, NU – dacă graful nu este hamiltonian. Dacă răspunsul este DA, atunci pe linia a doua se va scrie un ciclu hamiltonian de cost minim.

Exemplu

grhamilton.in	grhamilton.out	**Explicație**
4 6 1 2 10 1 4 100 1 3 15 2 4 10 2 3 100 4 3 20	DA 1 2 4 3 1	Ciclul hamiltonian 1 2 4 3 1 are costul cel mai mic: 10+10+20+15 = 55.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Maria Crina Diaconu, Pitești

I 148 (**tareconex**). Se dă un graf orientat cu n noduri și m arce. Pentru acest graf se dorește determinarea numărului minim de arce, notat cu $NrMin$, care dacă se adaugă se obține un graf tare conex.

Cerință

Cunoscând n, m și cele m arce se cere să se determine numărul $NrMin$ definit în enunț.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100$.

Date de intrare

Fișierul `tareconex.in` conține pe prima linie n și m separate printr-un spațiu, apoi pe următoarele m linii nodurile arcelor separate prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `tareconex.out` va conține pe prima linie $NrMax$.

Exemplu

tareconex.in	tareconex.out	**Explicație**
6 7 1 4 4 6 6 1 2 5 3 5 5 2 6 2	2	Ca să obținem graf tare conex, spre exemplu putem adăuga arcele (2,6) și (5,3).

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 149 (**exp**). Se dă o expresie aritmetică folosind operatorii + și ∗, operanzii fiind litere mici din alfabet: $a, b, c, \ldots$. Se știe că dacă o literă este în expresie, atunci și celelalte litere mai mici ca ea din alfabet se găsesc cel puțin o dată în expresie. Cunoscând valorile operanzilor, determinați valoarea expresiei aritmetice.

Cerință

Cunoscând expresia și valorile operanzilor, determinați valoarea expresiei.

Restricții și precizări

- Valoarea expresiei este cel mult 1000000000.
- Numărul de caractere din expresie este cel mult 1000.

Date de intrare

Fișierul `exp.in` conține pe prima linie expresia, iar pe linia a doua valorile operanzilor în ordinea alfabetică a lor.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `exp.out` va conține pe prima linie valoarea expresiei.

Exemplu

`exp.in`	`exp.out`	**Explicație**
a+c*a+b 10 12 131	1332	Valorile operanzilor sunt: a = 10 b = 12 c = 131 Valoarea expresiei este 10+131*10+12 = 1332

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 150 (**costlant**). Se dă un arbore ponderat cu n noduri, prin costurile muchiilor și rădăcina r. Afișați costul minim al unui lanț de la rădăcină la o frunză, notat cu $CostMin$.

Cerință

Cunoscând n, r și costurile muchiilor, determinați $CostMin$.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$.
- Costurile muchiilor sunt numere naturale ≤ 100.

Date de intrare

Fișierul `costlant.in` conține pe prima linie n și r, pe următoarele $n-1$ linii triplete cu perechi de noduri și costuri pentru muchii, separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `costlant.out` va conține $CostMin$.

`costlant.in`	`costlant.out`	**Explicație**
8 4 4 3 50 1 7 100 8 2 15 6 8 300 1 8 20 5 3 60 4 1 10	45	Lanțul (4,1,8,2) are costul cel mai mic, $CostMin = 10 + 20 + 15 = 45$

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Revistă sponsorizată de

ROWEB Development SRL

și

OSF Global Services SRL